

On considère un axe Ox sur lequel on place en $x = 0$ un haut-parleur produisant une onde plane acoustique qui se propage dans la direction des x croissants et de pulsation $\omega = 207 \text{ rad/s}$. Calculer la fréquence, le module du vecteur d'onde et la longueur d'onde de cette onde sachant que la vitesse du son dans l'air est de 300 m/sec (on n'oubliera pas les unités).

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{207}{300} = 0,69 \text{ m}^{-1} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,69} \approx 9,1 \text{ m} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{207}{2\pi} \approx 33 \text{ Hz}$$

La surpression maximale induite par l'onde est de $P_0 = 10^{-2} \text{ Pa}$. Exprimer l'équation de l'onde acoustique en fonction de x et t en notation réelle (donc non exponentielle). On définira l'origine temporelle comme l'instant où la surpression est nulle (0 Pa) et décroissante au niveau du haut-parleur (choisi comme origine de l'axe de propagation).

$$P(x, t) = P_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$P(0, 0) = 0 \Rightarrow P_0 \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$P(0, t \geq 0 \text{ (et petit)}) < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$P(x, t) = 10^{-2} \cdot \cos\left(207.t - 0,69.x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ Pa} \quad (= 10^{-2} \cdot \sin(207.t - 0,69.x))$$

Exprimer les équations horaires des points situés à 4,55 m et 9,1 m du haut-parleur et indiquer leur déphasage (quadrature, opposition ou en phase) par rapport à l'origine (c.a.d. le H.P.) On identifiera à π toutes les valeurs comprises entre 3,13 et 3,15 (ainsi que les multiples et sous multiples correspondants)

$$P(4,55,t) = 10^{-2} \cdot \cos\left(207.t - 0,69.4,55 + \frac{\pi}{2}\right) Pa \quad (= 10^{-2} \cdot \sin(207.t - 0,69.4,55))$$

$$P(4,55,t) = 10^{-2} \cdot \cos\left(207.t - 3,14 + \frac{\pi}{2}\right) Pa \quad (= 10^{-2} \cdot \sin(207.t - 3,14))$$

$$P(4,55,t) \approx 10^{-2} \cdot \cos\left(207.t - \frac{\pi}{2}\right) Pa \quad (= 10^{-2} \cdot \sin(207.t - \pi))$$

$$P(4,55,t) = -P(0,t) \Rightarrow \text{opposition de phase}$$

$$P(9,1,t) = 10^{-2} \cdot \cos\left(207.t - 0,69.9,1 + \frac{\pi}{2}\right) Pa \quad (= 10^{-2} \cdot \sin(207.t - 0,69.9,1))$$

$$P(9,1,t) = 10^{-2} \cdot \cos\left(207.t - 6,279 + \frac{\pi}{2}\right) Pa \quad (= 10^{-2} \cdot \sin(207.t - 6,279))$$

$$P(9,1,t) \approx 10^{-2} \cdot \cos\left(207.t - \frac{3\pi}{2}\right) Pa \quad (= 10^{-2} \cdot \sin(207.t - 2\pi))$$

$$P(9,1,t) = P(0,t) \Rightarrow \text{en phase}$$

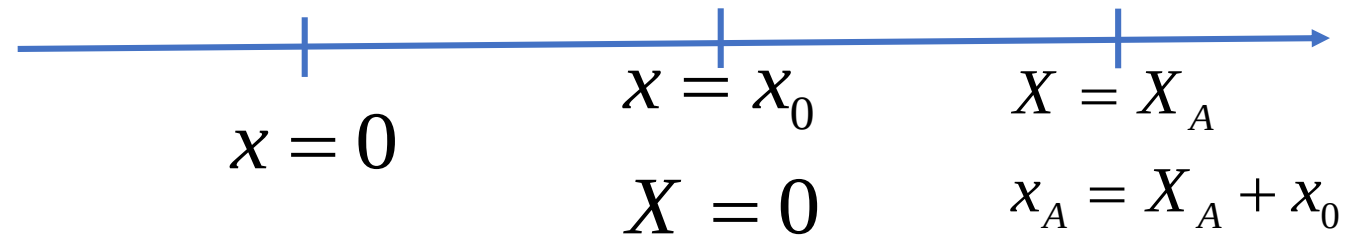
On se place maintenant en écriture complexe.

L'onde émise par le haut-parleur s'écrit alors comme $P_1(x,t) = P_0 \cdot e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$, φ ayant été déterminé à la question 2. On place en aval de ce haut-parleur à une position $x_0 > 0$ un second haut-parleur qui produit un signal identique avec les mêmes conditions initiales que pour le premier (c.a.d. que à $t = 0$, il produit une surpression nulle et décroissante au niveau du second haut-parleur) Exprimez en écriture complexe et dans les mêmes coordonnées (x,t) , $P_1(x,t)$ et $P_2(x,t)$ les équations des ondes émises par chaque haut-parleur

Pour le premier haut-parleur, on a :
$$P(x,t) = 10^{-2} \cdot \cos\left(207 \cdot t - 0,69 \cdot x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow P_1(x,t) = 10^{-2} \cdot e^{i\left(207 \cdot t - 0,69 \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Pour le second haut-parleur, un point x de l'espace est « rapproché » de la source de la distance

$$x_0 > 0 \Rightarrow P_2(x,t) = 10^{-2} \cdot e^{i\left(207 \cdot t - 0,69 \cdot (x - x_0) + \frac{\pi}{2}\right)}$$



Montrer que l'onde résultante de la somme de celles émise par les deux haut-parleurs est une onde plane que l'on peut écrire sous la forme $P_T(x,t) = \tilde{P}_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)}$, $\tilde{P}_0$ étant un nombre complexe que l'on calculera.

$$P_T(x,t) = P_1(x,t) + P_2(x,t) = 10^{-2} \cdot e^{i\left(207 \cdot t - 0,69 \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)} + 10^{-2} \cdot e^{i\left(207 \cdot t - 0,69 \cdot (x - x_0) + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$P_T(x,t) = 10^{-2} \cdot e^{i\left(207 \cdot t - 0,69 \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(1 + e^{+i \cdot 0,69 \cdot x_0}\right) = P_0 \cdot e^{i\left(\omega \cdot t - k \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(1 + e^{+ik \cdot x_0}\right)$$

$$P_T(x,t) = \overline{P_0} \cdot e^{i\left(\omega \cdot t - k \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)} \text{ avec } \overline{P_0} = P_0 \cdot \left(1 + e^{+ik \cdot x_0}\right) = 10^{-2} \cdot \left(1 + e^{+i \cdot 0,69 \cdot x_0}\right)$$

Calculer x_0 pour que l'onde résultante de la somme de ces deux ondes soit nulle en tout point de l'espace et pour tous les temps.

$$P_T(x,t) = 0 \forall (x,t) \Rightarrow \overline{P_0} = P_0 \cdot \left(1 + e^{+ik \cdot x_0}\right) = 0 \Rightarrow e^{+ik \cdot x_0} = -1$$

$$\Rightarrow k \cdot x_0 = (2n+1)\pi \Rightarrow x_0 = \frac{(2n+1)\pi}{k} = \frac{(2n+1)\pi}{0,69} = \frac{2n\pi}{0,69} + \frac{\pi}{0,69} = 9,1 \cdot n + \frac{9,1}{2} = n\lambda + \frac{\lambda}{2}$$