

Sous-groupes

1 Définitions

Exercice 1. Sous-groupes.

- 1) Les ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$?

1.1) $\{0\}$	1.3) $\{-1, 0, 1\}$	1.5) $2\mathbb{Z}$
1.2) $\{-1, 1\}$	1.4) $\mathbb{N}$	1.6) $2\pi\mathbb{Z}$
- 2) Les ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{R}^*, \times)$?

2.1) $\{-1, 1\}$	2.3) $\mathbb{R}_+^*$	2.5) $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
2.2) $\mathbb{Z}^*$	2.4) $\mathbb{R}_-^*$	2.6) $\{1, -1, i, -i\}$

Exercice 2. Sous-groupes de $GL_3(\mathbb{R})$.

On note $GL_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles 3×3 sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$GL_3(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}.$$

Muni de la multiplication matricielle, $GL_3(\mathbb{R})$ est un groupe que l'on appelle *groupe linéaire d'ordre 3*. Les ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de $GL_3(\mathbb{R})$?

- | | |
|---|--|
| 1) $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$ | 4) $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ |
| 2) $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\}$ | 5) $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(M) \in \{-1, 1\}\}$ |
| 3) $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$ | 6) $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(M) \in \mathbb{Z}^*\}$ |

Exercice 3. Une famille de sous-groupes de $\mathbb{R}$.

On considère le groupe $(\mathbb{R}, +)$. Soit λ un réel. Montrez que $\lambda\mathbb{Z} = \{\lambda n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Cercle unité.

Posons $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ l'ensemble des complexes de module 1. Nous rappelons que pour tous complexes z_1 et z_2 , nous avons $|z_1| \times |z_2| = |z_1 z_2|$.

- 1) Expliquez pourquoi $\mathbb{U}$ est inclus dans $\mathbb{C}^*$.
- 2) Soit z dans $\mathbb{C}^*$. Montrez que $|z^{-1}| = |z|^{-1}$. *Indication : partez de la relation $z z^{-1} = 1$.*
- 3) Montrez que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- 4) Donnez au moins deux sous-groupes de $\mathbb{U}$.

Exercice 5. Une union instable.

Trouvez un groupe G et deux sous-groupes H_1 et H_2 de G tels que $H_1 \cup H_2$ ne soit pas un sous-groupe de G .

2 Sous-groupe engendré

Exercice 6. Puissances dans un groupe.

- 1) Réécrivez la définition de la puissance entière en notant le groupe additivement.
- 2) Donnez x^3 et x^{-3} dans chacun des cas suivants :
 - 2.1) $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, $x = 2$;
 - 2.2) $G = (\mathbb{R}, +)$, $x = 2$;
 - 2.3) $G = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta)$, $x = \{0\}$.

Exercice 7. Puissances en notation additive.

Soient G un groupe et x un élément de G . On rappelle que pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a

$$x^{m+n} = x^m x^n, \quad x^m x^n = x^n x^m, \quad x^{-n} = (x^{-1})^n, \quad x^{mn} = (x^m)^n.$$

Réécrivez ce résultat en notant le groupe G additivement plutôt que multiplicativement.

Exercice 8. Sous-groupes monogènes.

Explicitez les éléments des sous-groupes suivants.

- | | |
|---|---|
| 1) $\langle 1 \rangle$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. | 5) $\langle -1 \rangle$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. |
| 2) $\langle -1 \rangle$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. | 6) $\langle 2\pi \rangle$ dans $(\mathbb{R}, +)$. |
| 3) $\langle i \rangle$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. | 7) $\langle \{0\} \rangle$ dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta)$. |
| 4) $\langle 1 \rangle$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. | 8) $\langle \{1\} \rangle$ dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta)$. |

3 Sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Exercice 9. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont monogènes.

Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. En utilisant la caractérisation précédente, montrez que H est engendré par un élément.