

Groupes

1 Loi de composition interne

Exercice 1. Loïs de composition.

Pour chacune des fonctions suivantes, dites s'il s'agit d'une loi de composition interne sur l'ensemble indiqué.

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|--|
| 1) $+$ sur $\mathbb{Q}$. | 3) $-$ sur $\mathbb{N}$. | 5) $\div$ sur $\mathbb{R}$. |
| 2) $+$ sur $\mathbb{Z}^*$. | 4) $\times$ sur $\mathbb{Z}$. | 6) $\star : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto 0$. |

Exercice 2. Propriétés des loïs de composition.

Pour chacune des loïs suivantes, dites si elle est commutative ou associative.

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|--|
| 1) $+$ sur $\mathbb{R}$. | 3) $-$ sur $\mathbb{Z}$. | 5) $\cup$ sur $\mathcal{P}(E)$. |
| 2) $\times$ sur $\mathbb{C}$. | 4) puissance sur $\mathbb{N}$. | 6) $\star : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto 0$. |

Exercice 3. Propriétés des loïs de composition.

Pour chacune des loïs suivantes, dites si elle admet un élément neutre en l'explicitant en cas d'existence.

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------|------------------------------------|
| 1) $+$ sur $\mathbb{Q}$. | 4) $\min$ sur $\mathbb{N}$. | 7) $\cup$ sur $\mathcal{P}(E)$. |
| 2) $\times$ sur $\mathbb{Q}$. | 5) $\min$ sur $\mathbb{Z}$. | 8) $\cap$ sur $\mathcal{P}(E)$. |
| 3) $-$ sur $\mathbb{Q}$. | 6) $\max$ sur $\mathbb{N}$. | 9) Δ sur $\mathcal{P}(E)$. |

Exercice 4. Unicité de l'élément neutre.

Soit $\star$ une loi de composition interne sur E . Montrez que si $\star$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

Indication : vous devez supposer qu'il existe deux éléments neutres e_1 et e_2 puis considérer la composition $e_1 \star e_2$.

Exercice 5. Pierre, Feuille, Ciseaux ... Léopard, Spock !.

Le jeu « Pierre, Feuille, Ciseaux, Léopard, Spock » est une extension du célèbre « Pierre, Feuille, Ciseaux ». En plus de compliquer les règles, cette variante a pour avantage de diminuer la probabilité d'une égalité entre les deux joueurs. La figure 1 suivant explique les relations entre les cinq signes. Soit $E = \{p, f, c, l, s\}$. Nous définissons la loi de composition interne $\diamond$ sur E qui à deux éléments de E associe l'élément gagnant.

- 1) Écrivez la table de la loi $\diamond$.
- 2) Cette loi est-elle commutative, associative et admet-elle un élément neutre ? Justifiez.

Exercice 6. Éléments neutres.

Montrez que les loïs suivantes admettent chacune un élément neutre.

- 1) La loi $\star$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \star y = x + y - 1$.
- 2) La loi $\star$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \star y = |x - y|$.
- 3) La multiplication matricielle $\times$ sur l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

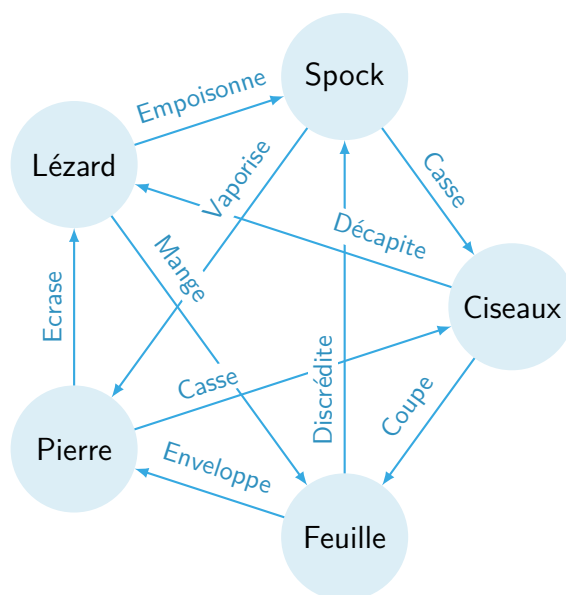


FIGURE 1 – Règles du jeu « Pierre, Feuille, Ciseaux, Lézard, Spock ».

4) La multiplication matricielle $\times$ sur l'ensemble

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q}^* \right\}.$$

Exercice 7. Monoïdes.

Pour chacun des ensembles suivants, donnez une loi de composition lui conférant une structure de monoïde.

- 1) $\mathbb{N}$. 2) $\mathbb{Z}$. 3) $\mathcal{P}(E)$. 4) E^E .

Exercice 8. Éléments inversibles.

Pour chacune des questions suivantes, dites si l'élément x est inversible pour la loi donnée et donnez un inverse le cas échéant.

- 1) Loi : $+$ sur $\mathbb{Z}$, $x = 0$. 3) Loi : $+$ sur $\mathbb{Z}$, $x = 3$. 5) Loi : $\times$ sur $\mathbb{Z}$, $x = 3$.
 2) Loi : $-$ sur $\mathbb{Z}$, $x = 0$. 4) Loi : $\times$ sur $\mathbb{Z}$, $x = (-1)$. 6) Loi : $\times$ sur $\mathbb{Q}$, $x = 3$.

On complique un peu les choses, on considère la multiplication matricielle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ ainsi que les éléments suivants :

- 7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 8) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Propriétés d'une loi.

Pour chacune des lois de composition internes suivantes, dites si elle est associative, commutative, si elle admet un élément neutre et si tout élément est inversible (relativement à l'éventuel élément neutre).

- 1) $+$ sur $\mathbb{N}$. 3) $\times$ sur $\mathbb{Z}^*$. 5) $+$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
 2) $+$ sur $\mathbb{Z}$. 4) $\times$ sur $\mathbb{Q}^*$. 6) $\times$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2 Groupe

Exercice 10. Groupes.

Les couples suivants sont-ils des groupes ?

- 1) $(\mathbb{Z}^*, \times)$.
- 2) $(\{-1, 1\}, \times)$.
- 3) $(\{-1, 0, 1\}, \times)$.
- 4) $(\{-1, 1, -i, i\}, \times)$.

Exercice 11. Unicité de l'inverse dans un groupe.

Soient $(G, \star)$ un groupe et x un élément de G . Montrez que l'inverse de x est unique.

Indication : vous devez supposer qu'il existe deux inverses y_1 et y_2 de x puis considérer la composition $y_1 \star x \star y_2$.

Exercice 12. Règles de calcul dans un groupe.

Soient G un groupe et x, y, z trois éléments de G .

- 1) Montrez que si $xy = xz$, alors $y = z$.
- 2) Montrez que si $xz = yz$, alors $x = y$.
- 3) Écrivez les contraposées des deux implications précédentes.
- 4) Dédisez-en la propriété équivalente que vérifie la ligne x de la table de Cayley de $\star$.
Même question pour la colonne z .

Exercice 13. Sudoku.

Posons $G = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sachant que $(G, \star)$ est un groupe abélien dont l'élément neutre est e , complétez la table de Cayley de la loi $\star$.

$\vec{c} \star$	a	b	c	d	e	f
a		c		e		
b			a			
c	f					
d		f		a		c
e						
f		d	e			a

Exercice 14. Groupe symétrique de degré 3.

Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. Nous noterons une application $f : E \rightarrow E$ de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}.$$

- 1) Combien y-a-t'il d'applications de E dans E ?
- 2) Explicitez toutes les *bijections* de E dans E . *Indication : il y en a six.*

Dans la suite nous noterons $\mathfrak{S}_3$ l'ensemble des bijections de E dans E . Muni de la composition des applications, cet ensemble forme un groupe non abélien.

- 3) Quel est l'élément neutre de $(\mathfrak{S}_3, \circ)$?
- 4) Donnez l'inverse de chaque élément de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 15. Tables de Cayley.

Posons $E = \{0, 1, 2\}$. Dans chacun des cas suivants, la loi $\diamond$ est définie à partir de sa table de Cayley. Dites si $(E, \diamond)$ est un groupe.

Si vous pensez que non, donner un contre-exemple. Si vous avez la conviction qu'il s'agit bien d'un groupe, nous vous dispensons de vérifier les 27 cas pour montrer que la loi est associative.

	$\overset{\curvearrowright}{\diamond}$	0	1	2
1)	0	0	0	0
	1	0	1	1
	2	0	1	2

	$\overset{\curvearrowright}{\diamond}$	0	1	2
2)	0	0	1	2
	1	1	0	1
	2	2	1	0

	$\overset{\curvearrowright}{\diamond}$	0	1	2
3)	0	0	1	2
	1	1	2	0
	2	2	0	1

Exercice 16. Groupe de permutations.

Notons E l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Considérons les applications $f_1, \dots, f_6 : E \rightarrow E$ définies pour tout x dans E par

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = 1 - x, \quad f_4(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad f_5(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad f_6(x) = \frac{x}{x - 1}.$$

Posons $F = \{f_1, \dots, f_6\}$.

- 1) Montrez que la composition d'applications $\circ$ est une loi de composition interne sur F en calculant sa table de Cayley.
- 2) Quel est l'élément neutre de cette loi?
- 3) Montrez que $f_1, \dots, f_6$ sont inversibles en trouvant leur inverses.
- 4) Expliquez pourquoi F est un groupe.
- 5) Ce groupe est-il abélien? Comment pouvez-vous le voir?