

Transformations géométriques

1 Homothétie

Exercice 1. Démonstration de la proposition.

Soit f_λ une homothétie sur E de rapport λ . Montrez que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E , on a

$$[f_\lambda]_{\mathcal{B}} = \lambda \text{Id}_E.$$

Correction. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Soit λ un scalaire dans $\mathbb{K}$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$f_\lambda(e_i) = \lambda \cdot e_i = (\overset{1}{0}, \dots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{\lambda}, \overset{i+1}{0}, \dots, \overset{n}{0})_{\mathcal{B}}.$$

Il reste alors à écrire verticalement les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des images des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour trouver

$$[f_\lambda]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \text{Id}_n.$$

2 Projecteur

Exercice 2. Projection dans $\mathbb{R}^2$.

On considère les sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$E = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F = \{(-x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

1) Montrez que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Correction. Montrons que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Soient (x, x) et (y, y) deux éléments de E et λ un réel. On a

$$\lambda \cdot (x, x) + (y, y) = (\lambda x + y, \lambda x + y) \in E.$$

Cela montre que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. On montre que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de la même manière.

2) Montrez que $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$.

Correction. Commençons par montrer que $E \cap F = \{(0, 0)\}$. Soit u un vecteur dans $E \cap F$. Il existe donc des réels x et x' tels que $u = (x, x) = (-x', x')$. On en déduit que $x = x'$ et $x = -x'$ donc que $x = 0$ puis $u = (0, 0)$. Enfin, on sait que

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) = 1 + 1 = 2.$$

Par conséquent, $E + F = \mathbb{R}^2$ et la somme est directe.

3) Calculez $p(1, 3)$ où p désigne la projection sur E parallèlement à F .

Correction. Méthode 1. On commence par remarquer que

$$E = \{x(1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1)), \quad F = \{x(-1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1)).$$

On pose alors $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 1))$. La matrice de la projection p dans la base $\mathcal{B}$ vaut alors

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On obtient la matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ en exprimant les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$. La matrice $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ est alors son inverse et peut être calculée avec un pivot de Gauss. On trouve

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de p dans la base canonique s'obtient alors en effectuant

$$[p]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [p]_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant calculer l'image de n'importe quel vecteur exprimé dans la base canonique. En particulier,

$$p(1, 3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2. Construisons l'application p . On sait que $p(u) = p(u_1 + u_2)$ avec $u_1 \in E$ et $u_2 \in F$. Il existe donc $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $u_1 = (x_1, x_1)$ et $u_2 = (-x_2, x_2)$. On a alors $u_1 + u_2 = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

On résout donc le système $x_1 - x_2 = 1$ et $x_1 + x_2 = 3$ pour trouver $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$. Donc $p(1, 3) = (2, 2)$.

Exercice 3. Projection dans $\mathbb{R}^4$.

On considère les sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$E = \{(x, -x, y, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad F = \{(x, x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

1) Montrez que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

Correction. Remarquons que

$$E = \{x(1, -1, 0, 0) + y(0, 0, 1, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)),$$

$$F = \{x(1, 1, 1, 0) + y(0, 0, 0, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

En particulier, ces deux sous-espaces sont de dimension deux. Montrons maintenant que leur intersection ne contient que le vecteur nul. Soit v dans $E \cap F$. Il existe alors des réels x_1, x_2, y_1 et y_2 tels que

$$v = (x_1, -x_1, y_1, -y_1) = (x_2, x_2, x_2, y_2).$$

Ainsi, $x_1 = x_2 = -x_1$ donc $x_1 = 0$ puis $y_1 = x_2 = x_1 = 0$. Cela montre que $v = (x_1, -x_1, y_1, -y_1)$ est le vecteur nul. Autrement dit, $E \cap F = \{0\}$ et donc $E + F = E \oplus F$. Ensuite,

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2 + 2 = 4.$$

Aussi, $E \oplus F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4, donc égal à $\mathbb{R}^4$.

- 2) Soit $x, t \in \mathbb{R}$. Calculez $p(x, 1, 0, t)$ où p désigne la projection sur E parallèlement à F .

Correction. Posons

$$\mathcal{B} = ((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

En notant $\mathcal{C}$ la base canonique, on a

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut alors déterminer la matrice de p dans la base canonique en calculant le produit matriciel $[p]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[p]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. On obtient alors

$$[p]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $p(x, 1, 0, t) = \frac{1}{2}(x - 1, -x + 1, -x - 1, x + 1)$.

Exercice 4. Projection dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit E et F les ensembles respectifs des applications paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Lors d'un précédent TD, nous avons montré que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = E \oplus F$. Soit $p : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la projection sur E parallèlement à F .

- 1) Calculez $p(f)$ avec f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$.

Correction. On remarque que $\cos = \cos + 0$. Comme $\cos$ est une fonction paire et 0 une fonction impaire, l'écriture $\cos + 0$ correspond à l'unique décomposition de la fonction cosinus dans la somme directe $E \oplus F$. On en déduit alors que $p(f) = f$.

- 2) Calculez $p(g)$ avec g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(x)$.

Correction. Comme précédemment, $\sin = 0 + \sin$ avec $0 \in E$ et $\sin \in F$. Ainsi, $p(g) = 0$.

3) Calculez $p(h)$ avec h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-2x} - x$.

Correction. Soit f dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \overbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}^{\text{fonction paire}} + \overbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}^{\text{fonction impaire}}.$$

On en déduit alors que

$$p(h)(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(-x)) = \frac{1}{2}(e^{-2x} - x + e^{2x} + x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh(2x).$$

3 Symétrie

Exercice 5. Interprétation géométrique.

Pour tout réel a , on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par l'égalité suivante.

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminez l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $M_a \times u = u$.

Correction. Cela revient à déterminer l'espace propre associé à la potentielle valeur propre 1. Si le réel 1 n'est pas une valeur propre de M_a , l'espace E_1 sera réduit au vecteur nul. On calcule donc le noyau de la matrice $M_a - \text{Id}_3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -a-1 & a-1 & a+1 \\ -a & a & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 2a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme le rang de la matrice $M_a - \text{Id}_3$ n'est pas maximal, on sait qu'il existe des vecteurs non nuls u tel que $M_a \times u = u$. Autrement dit, que le réel 1 est bien une valeur propre de M_a . On voit également que la dimension de l'espace propre E_1 dépend du paramètre a . Dans un premier temps, supposons que $a \neq 0$. On a

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow x = -y + z \text{ et } ay = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (z, 0, z) = z(1, 0, 1).$$

Dans ce cas, $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 1))$. Supposons maintenant que $a = 0$. On a

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow x = -y + z \Leftrightarrow (x, y, z) = (-y + z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1).$$

Ainsi, $E_1 = \text{Vect}((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

2) Montrez que le réel $2a + 1$ est une valeur propre de M_a .

Correction. Calculons le polynôme caractéristique de M_a .

$$\begin{aligned} P_{M_a}(X) &= \begin{vmatrix} -X & -1 & 1 \\ -a-1 & a-X & a+1 \\ -a & a & a+1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ -a-1 & 2a+1-X & a+1 \\ -a & 2a+1-X & a+1-X \end{vmatrix} \\ &= -X((2a+1-X)(a+1-X) - (2a+1-X)(a+1)) \\ &\quad + 1((-a-1)(2a+1-X) + a(2a+1-X)) \\ &= (2a+1-X)(-X(a+1-X) + X(a+1) + (-a-1) + a) \\ &= (2a+1-X)(X^2 - 1) = (2a+1-X)(X-1)(X+1). \end{aligned}$$

3) Déterminez l'ensemble des valeurs propres de M_a .

Correction. Le spectre de M_a est alors $\text{Sp}(M_a) = \{1, -1, 2a+1\}$.

4) Pour quelles valeurs du réel a l'endomorphisme représenté par M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-il une symétrie? Précisez les éléments caractéristiques de cette symétrie.

Correction. L'endomorphisme M_a est une symétrie s'il est diagonalisable et si son spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$. Comme $\text{Sp}(M_a) = \{1, -1, 2a+1\}$, il faut que $2a+1 = 1$ ou $2a+1 = -1$, donc que $a \in \{0, -1\}$.

Dans un premier temps, supposons que $a = 0$. D'après la première question, on sait déjà que $E_1 = \text{Vect}((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$. Calculons maintenant l'espace propre E_{-1} correspondant au noyau de la matrice $M_0 + \text{Id}_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $E_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = 0\} = \text{Vect}((1, 1, 0))$. Comme la somme des dimensions géométriques des valeurs propres de M_0 vaut 3, l'endomorphisme est bien diagonalisable. On en déduit que M_0 est une symétrie par rapport au plan E_1 parallèlement à la droite E_{-1} .

Supposons maintenant que $a = -1$. On sait que $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 1))$. On détermine ensuite E_{-1} en calculant le noyau de $M_{-1} + \text{Id}_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que

$$(x, y, z) \in E_{-1} \Leftrightarrow x = y - z \Leftrightarrow (x, y, z) = (y - z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Donc $E_{-1} = \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Encore une fois, la somme des dimensions géométriques vaut 3, donc M_{-1} est diagonalisable. C'est donc une symétrie par rapport à la droite E_1 parallèlement au plan E_{-1} .

Exercice 6. Symétries et projecteurs.

Démontrez qu'une symétrie de E peut s'exprimer en fonction d'un projecteur de E avec $s = 2p - \text{Id}_E$.

Correction. Si p est un projecteur sur F parallèlement à G , on a $p(x) = p(x_F + x_G) = x_F$ pour tout x dans E . Ainsi, $s(x) = s(x_F + x_G) = x_F - x_G = p(x) - x_G = p(x) - (x_F + x_G) + x_F = 2p(x) - (x_F + x_G)$. On obtient alors $s = 2p - \text{Id}_E$.

4 Affinité vectorielle

Exercice 7. Nature géométrique d'une application.

Déterminez la nature de l'application f définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (2x - y, 4x - 3y).$$

Correction. On détermine dans un premier temps le polynôme caractéristique de f : $P_f(X) = X^2 + X - 2$. On en déduit que les valeurs propres sont 1 et -2 . Les sous-espaces propres associés sont $E_1 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $E_{-2} = \{(x, 4x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. La matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres s'écrit donc :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'application f est donc une affinité vectorielle de rapport -2 par rapport à E_1 et parallèlement à E_{-2} .

Exercice 8. Interprétation géométrique.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice A suivante exprimée dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculez $f(e_2)$, $f(e_1 + e_3)$ et $f(e_1 - e_3)$.

Correction. On a $f(e_2) = e_2$, $f(e_1 + e_3) = e_1 + e_3$ et $f(e_1 - e_3) = -(e_1 - e_3)$.

2) Déduisez-en que f est diagonalisable et déterminez A' la matrice de l'endomorphisme f dans une base de vecteurs propres.

Correction. Posons $b_1 = e_2$, $b_2 = e_1 + e_3$, $b_3 = e_1 - e_3$ puis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. On remarque que $f(b_1) = b_1$ et $f(b_2) = b_2$ donc b_1 et b_2 sont deux vecteurs propres associés à la valeur propre 1. De même, on a $f(b_3) = -b_3$ donc b_3 est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 . Comme $\mathcal{B}$ est clairement une famille libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc f admet une base de vecteurs propre et est donc diagonalisable. On en déduit que

$$A' = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Interprétez géométriquement le résultat.

Correction. L'endomorphisme f est une symétrie par rapport au plan $\text{Vect}(b_1, b_2)$, parallèlement à la droite $\text{Vect}(b_3)$.

Exercice 9. Diagonalisation et géométrie.

Pour chacun des cas suivants, diagonalisez l'endomorphisme f_i de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice

A_i exprimée dans la base canonique et interprétez géométriquement le résultat.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Correction (A_1). Calculons le polynôme caractéristique de A_1 .

$$\begin{aligned} P_{A_1}(X) &= \begin{vmatrix} -3-X & -2 & 0 \\ 4 & 3-X & 0 \\ -2 & -2 & -1-X \end{vmatrix} = (-3-X)(3-X)(-1-X) + 8(-1-X) \\ &= (-1-X)((-3-X)(3-X) + 8) = (-1-X)(X^2 - 1) \\ &= (-1-X)(X+1)(X-1) = -(X+1)^2(X-1). \end{aligned}$$

Le spectre de A_1 est donc $\text{Sp}_{A_1} = \{-1, 1\}$. On sait alors que A_1 est une symétrie, sous réserve d'être diagonalisable. On détermine d'abord l'espace propre E_{-1} en calculant le noyau de $A_1 + \text{Id}_3$.

$$A_1 + \text{Id}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on a

$$(x, y, z) \in E_{-1} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (-y, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Ainsi, $E_{-1} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$. De même, on détermine l'espace propre E_1 en calculant le noyau de $A_1 - \text{Id}_3$.

$$A_1 - \text{Id}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on a

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow x - z = 0 \text{ et } y + 2z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1).$$

Donc $E_1 = \text{Vect}((1, -2, 1))$. Comme $\dim(E_{-1}) + \dim(E_1) = 3$, la matrice A_1 est diagonalisable. Par conséquent, A_1 est une symétrie par rapport à la droite E_1 , parallèlement au plan E_{-1} .

Correction (A_2). On calcule le polynôme caractéristique de A_2 . On a

$$\begin{aligned} P_{A_2}(X) &= \begin{vmatrix} -X & -1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 3 & 3 & 4-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(-X(4-X)+3) = (1-X)(X-1)(X-3) = -(1-X)^2(X-3). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}_{A_2} = \{1, 3\}$. On détermine l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 en calculant le noyau de $A_2 - \text{Id}_3$.

$$A_2 - \text{Id}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors que $E_1 = \text{Vect}((-1, 0, 1), (0, -1, 1))$. De la même manière, on détermine l'espace propre E_3 en calculant le noyau de $A_2 - 3\text{Id}_3$.

$$A_2 - 3\text{Id}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $E_3 = \text{Vect}((1, 0, -3))$. Comme $\dim(E_1) + \dim(E_3) = 3$, l'endomorphisme A_2 est diagonalisable. C'est donc une affinité vectorielle de rapport 3 par rapport à E_1 est parallèlement à E_3 .

Correction (A_3). On commence par calculer le polynôme caractéristique de A_3 . On a

$$\begin{aligned} P_{A_3}(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ -2 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (2-X) \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1-X \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(1-X)(-1-X) + 2(1-X) = (1-X)((2-X)(-1-X) + 2) \\ &= (1-X)(X^2 - X) = -X(1-X)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{Sp}_{A_3} = \{0, 1\}$. Déterminons tout d'abord l'espace propre E_0 en calculant le noyau de $A_3 - 0\text{Id}_3$.

$$A_3 - 0\text{Id}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $E_0 = \text{Vect}((1, 1, -2))$. On détermine ensuite l'espace propre E_1 en calculant le noyau de $A_3 - \text{Id}_3$.

$$A_3 - \text{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $E_1 = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$. Comme $\dim(E_0) + \dim(E_1) = 3$, A_3 est un endomorphisme diagonalisable. Par conséquent, A_3 est une projection sur le plan E_1 parallèlement à la droite E_0 .

Correction (A_4). Le polynôme caractéristique de A_4 est donné par

$$\begin{aligned} P_{A_4}(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 2 \\ 2 & 1-X & 2 \\ -2 & -2 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)^2(-3-X) - 8 - 8 + 4(1-X) + 4(1-X) - 4(-3-X) \\ &= (1-X)^2(-3-X) + 4(1-X) = (1-X)((1-X)(-3-X) + 4) \\ &= (1-X)(X^2 + 2X + 1) = (1-X)(X+1)^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}_{A_4} = \{-1, 1\}$. On détermine d'abord l'espace propre E_{-1} en calculant le noyau de $A_4 + \text{Id}_3$.

$$A_4 + \text{Id}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $E_{-1} = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$. On détermine ensuite E_1 en calculant le noyau de $A_4 - \text{Id}_3$.

$$A_4 - \text{Id}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aussi, $E_1 = \text{Vect}((1, 1, -1))$. La somme des dimensions géométriques des valeurs propres est égale à la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$, donc A_4 est diagonalisable. On en déduit alors que A_4 est une symétrie par rapport à la droite E_1 parallèlement au plan E_{-1} .

Exercice 10. Transformations de l'ibijau.

On considère les endomorphismes $f_1, \dots, f_8$ de $\mathbb{R}^2$ définis pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (2x, 2y), & f_5(x, y) &= (y, x), \\ f_2(x, y) &= (-2x, y), & f_6(x, y) &= (0, y - x), \\ f_3(x, y) &= \frac{1}{2}(x - y, y - x), & f_7(x, y) &= (-y, -x), \\ f_4(x, y) &= (-x, -y), & f_8(x, y) &= (x, -2y). \end{aligned}$$

Tous ces endomorphismes sont diagonalisables et correspondent à des affinités vectorielles. Il est toujours possible de constituer une base de vecteurs propres à partir de

$$u_1 = (1, 0), \quad u_2 = (0, 1), \quad u_3 = (1, -1), \quad u_4 = (1, 1).$$

Pour chacun des endomorphisme f_i ,

- déterminez la matrice de f_i dans la base canonique ;
- déterminez une base $\mathcal{B}_i$ dans laquelle la matrice de f_i est diagonale et donnez cette matrice ;
- interprétez géométriquement la transformation f_i ;
- dessiner l'image $\mathcal{F}_i$ de l'ibijau par f_i sur la figure 1.

Correction. On commence par calculer les matrices des endomorphismes f_i dans la

base canonique $\mathcal{C}$. On trouve

$$\begin{aligned} [f_1]_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & [f_2]_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & [f_3]_{\mathcal{C}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & [f_4]_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ [f_5]_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & [f_6]_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & [f_7]_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & [f_8]_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque que les matrices de f_1 , f_2 , f_4 et f_8 sont déjà diagonales dans la base canonique $\mathcal{C}$. Pour les autres endomorphismes, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_3((1, -1)) = (1, -1) = 1 \cdot (1, -1) \\ f_3((1, 1)) = (0, 0) = 0 \cdot (1, 1) \end{cases} & \begin{cases} f_5((1, 1)) = (1, 1) = 1 \cdot (1, 1) \\ f_5((1, -1)) = (-1, 1) = -1 \cdot (1, -1) \end{cases} \\ \begin{cases} f_6((0, 1)) = (0, 1) = 1 \cdot (0, 1) \\ f_6((1, 1)) = (0, 0) = 0 \cdot (1, 1) \end{cases} & \begin{cases} f_7((1, -1)) = (1, -1) = 1 \cdot (1, -1) \\ f_7((1, 1)) = (-1, -1) = -1 \cdot (1, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

On définit alors les bases $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_5$, $\mathcal{B}_6$ et $\mathcal{B}_7$ pour obtenir les matrices diagonales suivantes

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathcal{B}_3 = ((1, -1), (1, 1)), \\ \mathcal{B}_5 = ((1, 1), (1, -1)), \\ \mathcal{B}_6 = ((0, 1), (1, 1)), \\ \mathcal{B}_7 = ((1, -1), (1, 1)), \end{cases} & [f_3]_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & [f_5]_{\mathcal{B}_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ & [f_6]_{\mathcal{B}_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & [f_7]_{\mathcal{B}_7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que

	Type	Rapport	Espace invariant	Parallèlement à
f_1	Homothétie	2		
f_2	Affinité	-2	$\text{Vect}((0, 1))$	$\text{Vect}((1, 0))$
f_3	Projection		$\text{Vect}((1, -1))$	$\text{Vect}((1, 1))$
f_4	Homothétie	-1		
f_5	Symétrie		$\text{Vect}((1, 1))$	$\text{Vect}((1, -1))$
f_6	Projection		$\text{Vect}((0, 1))$	$\text{Vect}((1, 1))$
f_7	Symétrie		$\text{Vect}((1, -1))$	$\text{Vect}((1, 1))$
f_8	Affinité	-2	$\text{Vect}((1, 0))$	$\text{Vect}((0, 1))$

Exercice 11. Exercice de synthèse.

Considérons les trois vecteurs u_1 , u_2 et u_3 dans $\mathbb{R}^3$ définis par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs matrices exprimées dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$[f]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [g]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrez que $\text{Im}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}$.

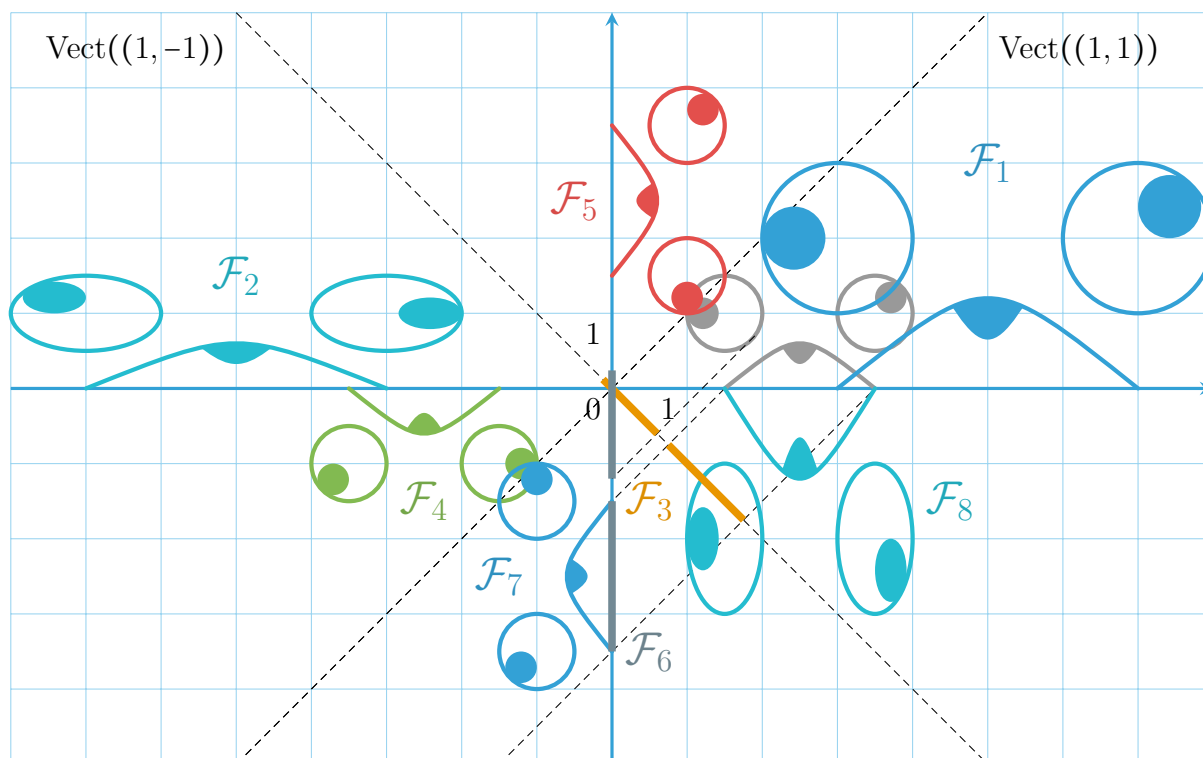


FIGURE 1 – Transformation de l'ibijau.

Correction. On commence par déterminer une base de $\text{Im}(g)$ à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss. Pour cela, on calcule une forme échelonnée de $[g]_C$. On obtient

$$[g]_C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme les pivots sont dans les deux premières colonnes, on sait que les deux premières colonnes de $[g]_C$ forment une base de $\text{Im}(g)$. Aussi, $\text{Im}(g)$ est de dimension 2 et on a

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}((3, 1, 2), (-1, 0, -1)).$$

Notons $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}$. Il s'agit de montrer que $\text{Im}(g) = E$. On vérifie facilement que $\dim(E) = 2$. Donc comme $\text{Im}(g)$ et E sont de même dimension, il suffit de montrer que $\text{Im}(g) \subseteq E$. On a

$$\begin{cases} -3 + 1 + 2 = 0 \\ -(-1) + 0 + (-1) = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} (3, 1, 2) \in E, \\ (-1, 0, -1) \in E. \end{cases}$$

Par conséquent, $\text{Im}(g) = \text{Vect}((3, 1, 2), (-1, 0, -1)) \subseteq E$ et l'égalité en découle.

2) Démontrez l'égalité $\text{Im}(g) = \text{Im}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - f)$.

Correction. On calcule une forme échelonnée de la matrice $(\text{Id}_3 - [f]_C)$ avec l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\text{Id}_3 - [f]_C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'image de $\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$ est engendrée par les deux premières colonnes de $\text{Id}_3 - [f]_C$. On remarque ensuite que

$$\text{Im}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - f) = \text{Vect}((6, 4, 2), (-3, 0, -3)) \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\} = \text{Im}(g).$$

Par conséquent, les sous-espaces $\text{Im}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - f)$ et $\text{Im}(g)$ sont égaux puisqu'ils ont la même dimension.

- 3) Déterminez le noyau de f et le noyau de g .

Correction. On calcule la forme échelonnée réduite de f et on rappelle celle de g .

$$[f]_C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \simeq \text{Id}_3, \quad [g]_C \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$. De plus,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(g) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \text{ et } y - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ et } y = z\} \\ &= \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1)). \end{aligned}$$

- 4) Le réel 0 est-il une valeur propre de f ? une valeur propre de g ? Justifiez.

Correction. Le noyau d'une application linéaire correspond à l'ensemble des vecteurs associés à la valeur propre 0. Aussi, 0 appartient au spectre de g mais pas au spectre de f .

- 5) Montrez que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction. On effectue un pivot de Gauss sur la matrice formée des vecteurs u_1, u_2 et u_3 écrits en colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \text{Id}_3.$$

On en déduit que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre composée de trois vecteurs, donc une base de $\mathbb{R}^3$.

- 6) Exprimez $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans $\mathcal{B}$ et déduisez-en la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Correction.

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (1, 1, 1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ f(u_2) &= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = 0 \cdot u_1 + \frac{1}{2} \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}} \\ f(u_3) &= \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \frac{1}{3} \cdot u_3 = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}} \end{aligned} \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- 7) Caractérisez géométriquement l'application f .

Correction. Question piège ! Ce n'est ni une homothétie, ni une symétrie, ni une projection, ni même une affinité vectorielle.

- 8) Calculez le polynôme caractéristique que g et déduisez-en son spectre.

Correction. On a

$$\begin{aligned}\det([g]_C - X \text{Id}_3) &= \begin{vmatrix} 3-X & -1 & -2 \\ 1 & -X & -1 \\ 2 & -1 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= X(3-X)(1+X) + 2 + 2 - 4X - (3-X) + (-1-X) \\ &= X(3-X)(1+X) - 4X = X((3-X)(1+X) - 4) \\ &= X(3 + 2X - X^2 - 4) = -X(X-1)^2.\end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Sp}(g) = \{0, 1\}$.

9) Déterminez une base de chaque sous-espace propre de g .

Correction. Nous avons déjà vu que

$$E_0 = \text{Ker}(g) = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

Il reste à déterminer une base du sous-espace propre E_1 .

$$\begin{aligned}[g]_C - \text{Id}_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \text{ et } y = 0\} = \{(z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1)).\end{aligned}$$

10) La matrice $[g]_C$ est-elle diagonalisable? Justifiez.

Correction. On remarque donc que la multiplicité géométrique de 1 est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique. L'endomorphisme g n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 12. Exercice de synthèse : projection.

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on considère les ensembles D_1 et D_2 suivants.

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}.$$

1) Donnez *sans justifier* deux vecteurs b_1 et b_2 tels que $D_1 = \text{Vect}(b_1)$ et $D_2 = \text{Vect}(b_2)$.

Correction. On a $D_1 = \text{Vect}((1, 0))$ et $D_2 = \text{Vect}((1, 1))$.

2) Décomposez tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$ sous la forme $u = d_1 + d_2$ avec $d_1 \in D_1$ et $d_2 \in D_2$.

Correction. On remarque que la famille $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour déterminer la décomposition d'un vecteur dans la somme directe $D_1 \oplus D_2$, on peut utiliser la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u = (x, y)$ un vecteur. On détermine ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ en calculant

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$u = (x, y) = (x - y) \cdot b_1 + y \cdot b_2 = (x - y, 0) + (y, y) \in D_1 \oplus D_2.$$

- 3) Les sous-espaces D_1 et D_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$? Justifiez.

Correction. Nous avons vu que la concaténation des bases de D_1 et D_2 forme une base de $\mathbb{R}^2$, les sous-espaces D_1 et D_2 sont en somme directe.

On note f la projection sur D_1 parallèlement à D_2 .

- 4) Quelle est la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$?

Correction.

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 5) Donnez la matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ puis calculez $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Correction.

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 6) En utilisant la formule de changement de base, calculez la matrice de l'application f dans la base canonique.

Correction.

$$[f]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$