

Transformations géométriques

1 Homothétie

Exercice 1. Démonstration de la proposition.

Soit f_λ une homothétie sur E de rapport λ . Montrez que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E , on a

$$[f_\lambda]_{\mathcal{B}} = \lambda \text{Id}_E.$$

2 Projecteur

Exercice 2. Interprétation géométrique.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice A suivante dans la base canonique. Diagonalisez la matrice A et interprétez géométriquement le résultat.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Projection dans $\mathbb{R}^2$.

On considère les sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$E = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F = \{(-x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

- 1) Montrez que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
- 2) Montrez que $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$.
- 3) Calculez $p(1, 3)$ où p désigne la projection sur E parallèlement à F .

Exercice 4. Projection dans $\mathbb{R}^4$.

On considère les sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$E = \{(x, -x, y, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad F = \{(x, x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- 1) Montrez que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.
- 2) Soit $x, t \in \mathbb{R}$. Calculez $p(x, 1, 0, t)$ où p désigne la projection sur E parallèlement à F .

Exercice 5. Projection dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit E et F les ensembles respectifs des applications paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Lors d'un précédent TD, nous avons montré que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = E \oplus F$. Soit $p : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la projection sur E parallèlement à F .

- 1) Calculez $p(f)$ avec f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$.
- 2) Calculez $p(g)$ avec g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(x)$.
- 3) Calculez $p(h)$ avec h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-2x} - x$.

3 Symétrie

Exercice 6. Interprétation géométrique.

Pour tout réel a , on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par l'égalité suivante.

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminez l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $M_a \times u = u$.
- 2) Montrez que le réel $2a+1$ est une valeur propre de M_a .
- 3) Déterminez l'ensemble des valeurs propres de M_a .
- 4) Pour quelles valeurs du réel a l'endomorphisme représenté par M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est-il une symétrie? Précisez les éléments caractéristiques de cette symétrie.

Exercice 7. Symétries et projecteurs.

Démontrez qu'une symétrie de E peut s'exprimer en fonction d'un projecteur de E avec $s = 2p - \text{Id}_E$.

4 Affinité vectorielle

Exercice 8. Nature géométrique d'une application.

Déterminez la nature de l'application f définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (2x - y, 4x - 3y).$$

Exercice 9. Interprétation géométrique.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice A suivante exprimée dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculez $f(e_2)$, $f(e_1 + e_3)$ et $f(e_1 - e_3)$.
- 2) Déduisez-en que f est diagonalisable et déterminez A' la matrice de l'endomorphisme f dans une base de vecteurs propres.
- 3) Interprétez géométriquement le résultat.

Exercice 10. Diagonalisation et géométrie.

Pour chacun des cas suivants, diagonalisez l'endomorphisme f_i de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice A_i exprimée dans la base canonique et interprétez géométriquement le résultat.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

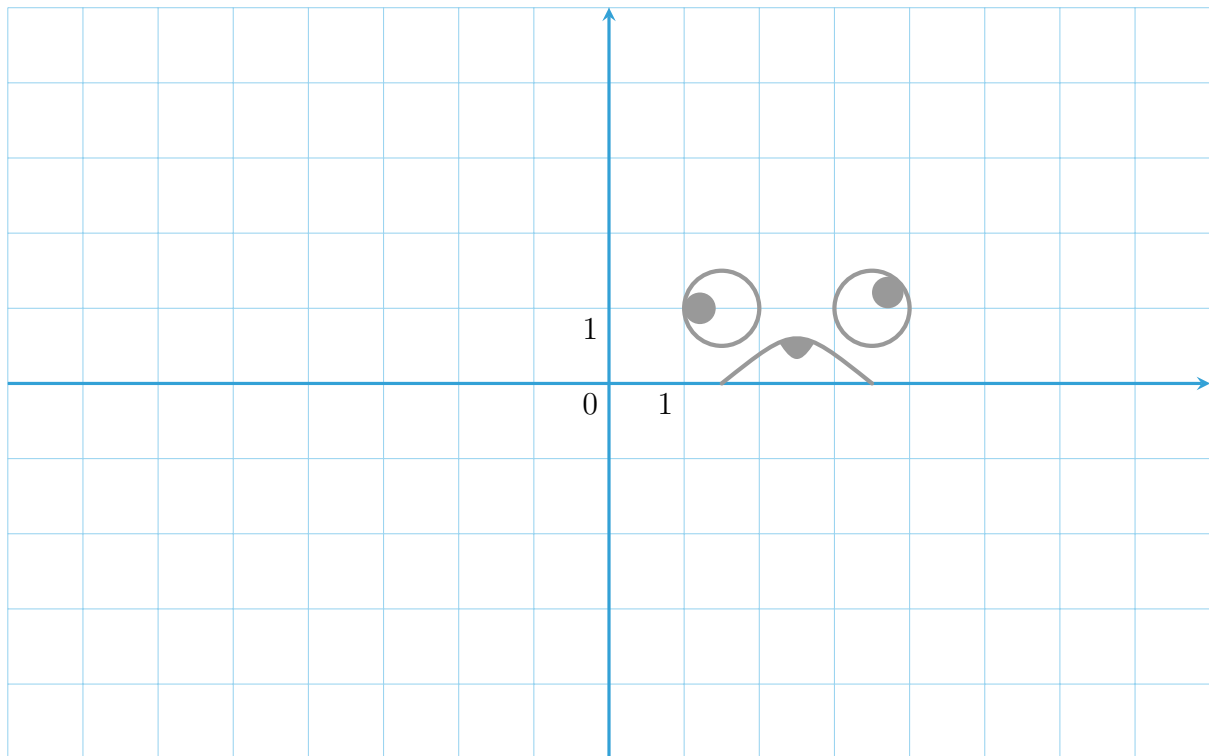


FIGURE 1 – Transformation de l'ibijau.

Exercice 11. Transformations de l'ibijau.

On considère les endomorphismes $f_1, \dots, f_8$ de $\mathbb{R}^2$ définis pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (2x, 2y), & f_5(x, y) &= (y, x), \\ f_2(x, y) &= (-2x, y), & f_6(x, y) &= (0, y - x), \\ f_3(x, y) &= \frac{1}{2}(x - y, y - x), & f_7(x, y) &= (-y, -x), \\ f_4(x, y) &= (-x, -y), & f_8(x, y) &= (x, -2y). \end{aligned}$$

Tous ces endomorphismes sont diagonalisables et correspondent à des affinités vectorielles. Il est toujours possible de constituer une base de vecteurs propres à partir de

$$u_1 = (1, 0), \quad u_2 = (0, 1), \quad u_3 = (1, -1), \quad u_4 = (1, 1).$$

Pour chacun des endomorphisme f_i ,

- déterminez la matrice de f_i dans la base canonique ;
- déterminez une base $\mathcal{B}_i$ dans laquelle la matrice de f_i est diagonale et donnez cette matrice ;
- interprétez géométriquement la transformation f_i ;
- dessiner l'image $\mathcal{F}_i$ de l'ibijau par f_i sur la figure 1.

Exercice 12. Exercice de synthèse.

Considérons les trois vecteurs u_1 , u_2 et u_3 dans $\mathbb{R}^3$ définis par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs matrices exprimées dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$[f]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [g]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrez que $\text{Im}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}$.
- 2) Démontrez l'égalité $\text{Im}(g) = \text{Im}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - f)$.
- 3) Déterminez le noyau de f et le noyau de g .
- 4) Le réel 0 est-il une valeur propre de f ? une valeur propre de g ? Justifiez.
- 5) Montrez que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 6) Exprimez $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans $\mathcal{B}$ et déduisez-en la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
- 7) Caractérisez géométriquement l'application f .
- 8) Calculez le polynôme caractéristique que g et déduisez-en son spectre.
- 9) Déterminez une base de chaque sous-espace propre de g .
- 10) La matrice $[g]_{\mathcal{C}}$ est-elle diagonalisable? Justifiez.

Exercice 13. Exercice de synthèse : projection.

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on considère les ensembles D_1 et D_2 suivants.

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}.$$

- 1) Donnez *sans justifier* deux vecteurs b_1 et b_2 tels que $D_1 = \text{Vect}(b_1)$ et $D_2 = \text{Vect}(b_2)$.
- 2) Décomposez tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$ sous la forme $u = d_1 + d_2$ avec $d_1 \in D_1$ et $d_2 \in D_2$.
- 3) Les sous-espaces D_1 et D_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$? Justifiez.

On note f la projection sur D_1 parallèlement à D_2 .

- 4) Quelle est la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$?
- 5) Donnez la matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ puis calculez $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
- 6) En utilisant la formule de changement de base, calculez la matrice de l'application f dans la base canonique.