

Licence Sciences biomédicales

Année 2020-2021

**UFR des Sciences Fondamentales
et Biomédicales
UFR de Pharmacie**

L2 Semestre 3
Session initiale

Corrigé de l'examen de l'U.E. SA03U050
Mathématiques Appliquées aux Sciences 3
Mercredi 16 décembre 2020

Durée : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde et de complément de réponse incluses).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- **On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.**
- **Les calculatrices sont interdites.**

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Exercice 1

Résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x + y + z - 2t = 3 \\ 2x - y + 2z - t = 2 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Réolvons (S) à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

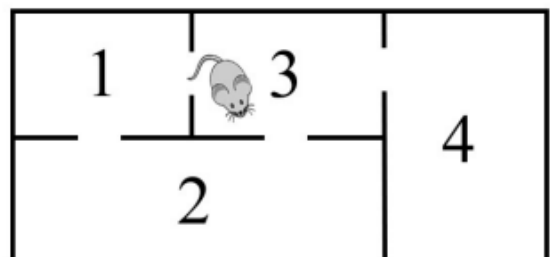
$$\begin{aligned} (S) \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ 2z - t = 2 \\ -3y + 4z + t = 0 \\ -6y + 5z + 3t = -3 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ -3y + 4z + t = 0 \\ 2z - t = 2 \\ -6y + 5z + 3t = -3 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \longleftrightarrow L_3 \end{matrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ -3y + 4z + t = 0 \\ 2z - t = 2 \\ -3z + t = -3 \end{cases} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ -3y + 4z + t = 0 \\ 2z - t = 2 \\ -z = -1 \end{matrix} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 - t = 1 \\ -3y + 4 + t = 0 \\ 2 - t = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ -3y = -4 \\ t = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2/3 \\ y = 4/3 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases}} \end{aligned}$$

Le système (S) admet donc une solution unique : $\{(2/3 ; 4/3 ; 1 ; 0)\}$.

Exercice 2

Une souris est placée dans un labyrinthe (voir schéma ci-contre).

Chaque fois qu'elle entend un coup de sifflet, elle panique et change de compartiment, en choisissant au hasard l'une des portes.



On note : $X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ t_i \end{pmatrix}$ le vecteur d'état après le $i^{\text{ème}}$ coup de sifflet, les coefficients x_i, y_i, z_i, t_i désignant

la probabilité de trouver la souris respectivement dans les compartiments 1, 2, 3, 4, après le $i^{\text{ème}}$ coup de sifflet.

1) a) Montrer que la matrice de transition associée à cette situation est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note : $X_{i+1} = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ t_{i+1} \end{pmatrix}$ le vecteur d'état après le $(i + 1)^{\text{ème}}$ coup de sifflet, les coefficients x_{i+1} , y_{i+1} , z_{i+1} ,

t_{i+1} désignant la probabilité de trouver la souris respectivement dans les compartiments 1, 2, 3, 4, après le $(i + 1)^{\text{ème}}$ coup de sifflet.

* Du compartiment (1), la souris peut aller au compartiment (2) ou (3), avec la probabilité 1/2 pour chaque choix.

* Du compartiment (2), la souris peut aller au compartiment (1) ou (3), avec la probabilité 1/2 pour chaque choix.

* Du compartiment (3), la souris peut aller au compartiment (1), (2) ou (4), avec la probabilité 1/3 pour chaque choix.

* Du compartiment (4), la souris peut aller uniquement au compartiment (3), avec la probabilité 1.

On en déduit que :

- la probabilité de trouver la souris au $(i + 1)^{\text{ème}}$ coup de sifflet dans le compartiment (1) s'écrit

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}y_i + \frac{1}{3}z_i$$

- la probabilité de trouver la souris au $(i + 1)^{\text{ème}}$ coup de sifflet dans le compartiment (2) s'écrit

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{3}z_i$$

- la probabilité de trouver la souris au $(i + 1)^{\text{ème}}$ coup de sifflet dans le compartiment (3) s'écrit

$$z_{i+1} = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}y_i + t_i$$

- la probabilité de trouver la souris au $(i + 1)^{\text{ème}}$ coup de sifflet dans le compartiment (4) s'écrit $t_{i+1} = \frac{1}{3}z_i$.

$$\text{On en tire : } X_{i+1} = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ t_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_i + \frac{1}{3}z_i \\ \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{3}z_i \\ \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}y_i + t_i \\ \frac{1}{3}z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ t_i \end{pmatrix} = TX_i.$$

D'où la matrice de transition : $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$

b) Rappeler, en prenant comme exemple la matrice T , les caractéristiques d'une matrice de transition.

- * Une matrice de transition est une matrice carrée dont les éléments sont tous positifs ou nuls.
- * La somme des coefficients de chaque colonne d'une matrice de transition vaut 1 (somme de probabilités).
- * L'élément t_{ij} d'une telle matrice peut être considéré comme la probabilité de passer de l'état j à l'état i .

2) La souris se trouvait dans le compartiment 3 au départ. Écrire le vecteur d'état correspondant à l'état initial, X_0 , puis celui correspondant à sa position après un coup de sifflet, puis après un deuxième coup de sifflet. Rappeler et vérifier sur ces 3 vecteurs les caractéristiques d'un vecteur d'état.

* Vecteur d'état initial : $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

* Après le 1er coup de sifflet : $X_1 = TX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

* Après le 2ème coup de sifflet : $X_2 = TX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

* Un vecteur d'état est une matrice-colonne dont les éléments sont positifs ou nuls, et dont la somme des éléments vaut 1, ce que l'on peut vérifier sur les 3 vecteurs colonnes précédents.

3) Définir et déterminer le vecteur d'état stationnaire de la matrice T . Interpréter le résultat obtenu.

Le vecteur d'état stationnaire de la matrice T est le vecteur d'état tel que $TE = E$.

Dans ce cas, le vecteur d'état E est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de la matrice T .

Cherchons donc les vecteurs $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \neq 0$ tels que $TE = E \Leftrightarrow TE - E = 0 \Leftrightarrow (T - I)E = 0$,

soit : $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z + t = 0 \\ \frac{1}{3}z - t = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ t = \frac{1}{3}z \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ x = y \\ y - \frac{2}{3}z = 0 \\ t = \frac{1}{3}z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}z \\ x = y \\ y = \frac{2}{3}z \\ t = \frac{1}{3}z \end{cases}$$

On en déduit : $\begin{cases} x = y = \frac{2}{3}z \\ t = \frac{1}{3}z \end{cases}$ d'où : $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}z \\ z \\ \frac{1}{3}z \end{pmatrix} \neq 0$, si et seulement si $z \neq 0$.

De plus, il faut que : $x + y + z + t = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}z + z + \frac{1}{3}z = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{3}z = 1$, d'où : $\boxed{z = \frac{3}{8}}$.

Finalement : $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ est le vecteur d'état stationnaire de la matrice T .

Conclusion : Au bout d'un temps suffisamment long, les probabilités de trouver la souris dans les différents compartiments seront : $x = y = 1/4$ (compartiments 1 et 2), $z = 3/8$ (compartiment 3) et $t = 1/8$ (compartiment 4). Il y a donc plus de chances de trouver la souris dans le compartiment 3 (37,5%) au bout d'un temps suffisamment long.

Exercice 3

Soit la matrice A telle que : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle inversible ? Justifier la réponse. En déduire une valeur propre évidente de la matrice A .

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, car au moins deux colonnes (ou lignes) de la matrice A sont identiques.

La matrice A n'est donc pas inversible.

On en déduit que la matrice A admet $\lambda_0 = 0$ pour valeur propre.

2) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ associé à la matrice A . En déduire les valeurs propres de la matrice A . On précisera leur multiplicité.

* Polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

soit remplaçant C_3 par $C_3 + C_2$:

$$P_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(-1)^{2+3}(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda).$$

=> les 3 racines (simples) du polynôme, valeurs propres simples de A , sont : $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

3) Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres de A .

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_0 = 0$:

$$\text{Ils vérifient : } AY = 0 \text{ } Y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit le système : } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = z \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_0 = 0$ est donc :

$$\boxed{\{Y_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}}.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$:

$$\text{Ils vérifient : } (A - I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit le système : } \begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} y = z \\ z = -x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{y = z = -x}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est donc :

$$\{Y_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$:

$$\text{Ils vérifient : } (A - 2I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit le système : } \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = y - z \\ y - z - y + z = 0 \\ y - z + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ 0 = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est donc :

$$\{Y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

On considère un système physique dont les seules énergies possibles sont les valeurs propres de la matrice H (hamiltonien) qui s'écrit sous la forme : $H = E \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E A$, où E est une constante strictement positive qui a la dimension d'une énergie.

4) En vous servant des résultats des questions précédentes, déduire les énergies possibles du système en fonction de E .

Les valeurs propres λ de H sont telles qu'il existe un vecteur Y non nul, tel que : $HY = \lambda Y$.

Or on sait que $AY_i = \lambda_i Y_i$, avec $\lambda_i = \lambda_0 = 0$ ou $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 2$, et $Y_i = Y_0$ ou Y_1 ou Y_2 respectivement (cf q 3).

$$\text{Ainsi : } HY_i = EAY_i = E\lambda_i Y_i$$

$\Rightarrow E\lambda_i$ est valeur propre de la matrice H associée au vecteur propre Y_i .

Les énergies possibles du système sont donc 0, E et 2E.

5) Le système est préparé dans l'état : $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la valeur moyenne de l'énergie du système

dans cet état, donnée par : $\langle H \rangle = {}^t U H U$, où ${}^t U$ désigne la transposée de la matrice U .

$$\langle H \rangle = {}^t U H U = E \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ainsi : $\boxed{\langle H \rangle = {}^t U H U = E}$.