

EXERCICE 1

$$1. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3 = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 + 3} = 0$$

2. a) Comme $-3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 6 = 0$ donc -1 est une racine évidente de $-3x^2 + 3x + 6 = 0$.

Comme $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{-3} = -2$, on a $x_2 = 2$. De plus, le coefficient de x^2 est négatif

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$-3x^2+3x+6$	$-$	0	$+$	0	$-$

b) $g(x) = \frac{1-x}{-3x^2+3x+6}$. Pour $x \neq 0$, $\frac{-x}{-3x^2} = \frac{1}{3x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0$.

Or la limite à l'infini d'un quotient de polynômes est celle du quotient simplifié de ses termes de plus haut degré donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

c) Limites en 2, en utilisant le signe étudié en a) :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 1 - x = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} -3x^2 + 3x + 6 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc par quotient } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} g(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 1 - x = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} -3x^2 + 3x + 6 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc par quotient } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$$

d) Limite en -1 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} 1 - x = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} -3x^2 + 3x + 6 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc par quotient } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty$$

Cette limite en -1 et les limites infinies en 2 permettent de conclure que $\mathcal{C}_g$ admet deux asymptotes verticales d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

De plus, les limites à l'infini permettent de justifier que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

3. $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

a) Pour $x \neq 0$, $\frac{x^2}{x} = x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

Or la limite à l'infini d'un quotient de polynôme est celle du quotient simplifié de ses termes de plus haut degré donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

b) $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$ donc 1 est une racine évidente de $x^2 - 3x + 2$.

Comme $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 2$, on a $x_2 = 2$.

Ainsi, pour $x \neq 1$, $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} x - 2 = -1$, alors $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -1$.

$$4. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2} + 1 = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} e^X = e \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{3}{x^2} + 1} = e.$$

5. $v(x) = \frac{(5 - 2x)(2 + ax)}{3x^2 + 5} = \frac{-2ax^2 + (5a - 4)x + 10}{3x^2 + 5}$

Étudions la limite par disjonction des cas :

- $a \neq 0$: On a pour $x \neq 0$, $\frac{-2ax^2}{3x^2} = \frac{-2a}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2a}{3} = \frac{-2a}{3}$

Or la limite à l'infini d'un quotient de polynôme est celle du quotient simplifié de ses termes de plus haut degré donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = \frac{-2a}{3}$

Ainsi, pour que $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 8$, on a $-\frac{2a}{3} = 8$ soit $a = -12$

- $a = 0$, $v(x) = \frac{-4x + 10}{3x^2 + 5}$ et pour $x \neq 0$, $\frac{-4x}{3x^2} = \frac{-4}{3x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3x} = 0$.

On en déduit de la même façon que $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 0$ ce qui n'est pas compatible avec le résultat cherché.

$a = 0$ ne peut être une solution.

En conclusion, la seule valeur de a possible est $a = -12$.

$$6. w(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{3x+4} = \frac{(\sqrt{3x} - \sqrt{3x+4})(\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4})}{\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}} = \frac{3x - (3x+4)}{\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}} = \frac{-4}{\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x} = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x+1 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+1} = +\infty$$

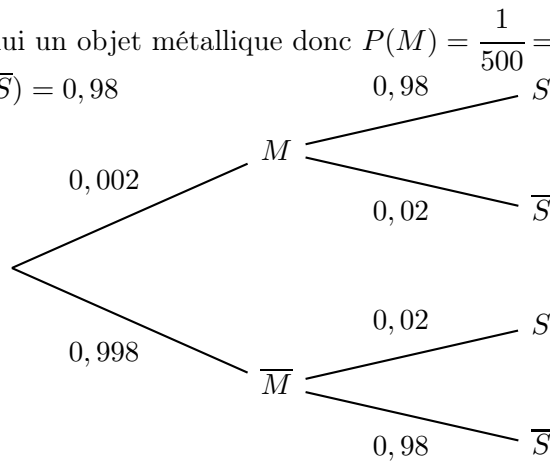
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+1} = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x} + \sqrt{3x+4} = +\infty$$

et donc par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}} = 0$

EXERCICE 2

Partie A

- Un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique donc $P(M) = \frac{1}{500} = 0,002$.
De plus, $P_M(S) = 0,98$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S}) = 0,98$
- Arbre pondéré



- M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(M \cap S) + P(\overline{M} \cap S)$$

$$= P(M) \times P_M(S) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(S)$$

$$= 0,002 \times 0,98 + 0,998 \times 0,02$$

$$= 0,00196 + 0,01996 = 0,02192$$

$$4. P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0,00196}{0,02192} \approx 0,089$$

Ainsi, la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique est d'environ 0,089.

Partie B

- « Passer le portique de sécurité » est une épreuve de Bernoulli dont le succès « le portique sonne » a pour probabilité 0,02192
 - Répéter 80 fois de façon identique et indépendante cette expérience forme un schéma de Bernoulli de paramètre 80 et 0,02192
 - Comme X compte le nombre de succès, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80; 0,02192)$.
- $E(X) = np = 80 \times 0,02192 = 1,7536$ ce qui signifie que dans un groupe de 80 personnes, il y en a en moyenne un peu moins de 2 personnes qui font sonner le portique.
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,830$
Donc la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique est d'environ 0,830.
 - $P(X \leq 5) \approx 0,992$
donc la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique est d'environ 0,992.

4. a) D'après la calculatrice, $P(X \leq 3) \approx 0,9008$ et $P(X \leq 2) \approx 0,74$ donc le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,9$ est 3.
- b) Ce résultat signifie que lorsque 80 personnes passent sous un portique, il y a au plus 3 d'entre elles qui le font sonner dans plus de 90 % des cas.

Partie C

1. De même, pour un groupe de n personnes, on peut montrer que Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,02192)$.
2. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \times (n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$. On peut aussi justifier en utilisant un arbre de probabilité. Dans l'arbre correspond à un schéma de Bernoulli d'ordre n , il y a une unique branche qui correspond à zéro succès pour n tentatives donc $\binom{n}{0} = 1$.
3. Ainsi, $P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0,02192^0 \times (1 - 0,02192)^n = 1 \times 1 \times 0,97808^n = 0,97808^n$.
4. Comme $0 < 0,97808 < 1$, la suite $(0,97808^n)$ est décroissante. De plus, $0,97808^{16} \approx 0,701 > 0,70$ et $0,97808^{17} \approx 0,69 < 0,70$ donc la plus grande valeur de n tel que $P(Y = 0) \geq 0,70$ est $n = 16$. On peut donc affirmer que lorsqu'il y a plus de 16 personnes dans le groupe, la probabilité que personne ne fasse sonner le portique est inférieur à 0,70.

Partie D

1. Puisque qu'en moyenne un passager sur 500 porte un objet métallique, il y en a en moyenne trois sur un groupe de 1500 passagers.
2. La situation correspond à la variable Y de la partie C. On cherche à déterminer la plus petite valeur de n tel que $P(Y \geq 3) > 0,95$ soit $1 - P(Y \leq 2) > 0,95$ soit encore $P(Y \leq 2) < 0,05$. On obtient pour $n = 285$, $P(Y \leq 2) \approx 0,05004 > 0,05$ et pour $n = 286$, $P(Y \leq 2) \approx 0,00492 < 0,05$. Ainsi, en ne faisant passer que 286 personnes sous le portique, la probabilité qu'il sonne au moins 3 fois est supérieure à 0,95 et on peut donc estimer que les personnes qui vont faire sonner le portique sont dans ces 286 personnes parmi le groupe de 1500 personnes qui doivent embarquer.

EXERCICE 3

1. Dans la cellule B4, on saisit : `=1.25*B3-0.25*B2`

2. Tableau complété (à 10^{-3} près) :

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984

3. On peut donc conjecturer que la suite (u_n) converge vers 7.

Partie B :

1. a) Pour tout n ,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} & \text{Or } u_{n+2} &= \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\
 &= \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} \\
 &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\
 &= v_n
 \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite constante.

Comme $v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{1}{4} \times 3 = \frac{21}{4}$, on a pour tout n , $v_n = v_0$ soit $v_n = \frac{21}{4}$.

- b) Comme $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ alors $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$ pour tout n .
2. a) On pose $P_n \ll u_n < u_{n+1} < 7 \gg$
- Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = 6$ donc $u_0 < u_1 < 7$ donc P_0 est vraie
 - Hérédité : On suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie, soit :

$$u_n < u_{n+1} < 7$$
Donc $\frac{1}{4}u_n < \frac{1}{4}u_{n+1} < \frac{7}{4}$
Donc $\frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} < \frac{7}{4} + \frac{21}{4}$
Donc $u_{n+1} < u_{n+2} < 7$
Donc P_{n+1} est vraie donc P est héréditaire.
 - Comme P_0 est vraie et P est héréditaire, on a montré par récurrence que, pour tout entier naturel n :
 $u_n < u_{n+1} < 7$.
- b) Pour tout n , $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
De plus, pour tout n , $u_n < 7$ donc (u_n) est majorée par 7.
D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.
3. Fonction Python :

```
def seuil():
    n=0
    u=3
    while u<=6,999 :
        u=0.25*u+5.25
        n=n+1
    return(n)
```

4. a) Pour tout n ,
- $$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 7 \\ &= \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 \\ &= \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} \\ &= \frac{1}{4}(u_n - 7) \\ &= \frac{1}{4}w_n \end{aligned}$$
- De plus, $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$. Donc (w_n) est une suite géométrique de terme initial $w_0 = -4$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.
- b) La formule explicite d'une telle suite est $w_n = w_0 \times q^n$ soit $w_n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$
ou encore $w_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ pour tout n .
Comme $w_n = u_n - 7$ alors $u_n = 7 + w_n$ soit, pour tout n , $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
- c) Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ soit $\lim_{n \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ ou encore $\lim_{n \rightarrow \infty} 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 7$
Donc (u_n) converge vers 7.