

—
TERMINALES 4 ET 6
—
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES
—

durée 4 heures

calculatrices autorisées

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Le sujet comprend une feuille annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 1

(5,5 points)

Dans cet exercice, les 5 questions sont indépendantes

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x + 1}{x^2 + 3}$.
Déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$.
2. Soit g une fonction définie par $g(x) = \frac{1 - x}{-3x^2 + 3x + 6}$.
 - a) Étudier le signe de $-3x^2 + 3x + 6$ sur $\mathbb{R}$.
 - b) Déterminer les limites de g à l'infini.
 - c) Déterminer les limites de g en 2.
 - d) Soit $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g . $\mathcal{C}_g$ admet-elle des asymptotes ? Justifier.
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.
 - a) Déterminer la limite de $h(x)$ en $-\infty$.
 - b) Déterminer la limite de $h(x)$ en 1.
4. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = \frac{(5 - 2x)(2 + ax)}{3x^2 + 5}$ où $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur du réel a tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 8$. Justifier.
5. Soit w la fonction définie par $w(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{3x + 4}$. Déterminer la limite de w en $+\infty$.

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :

- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

Partie A

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.
2. Compléter l'arbre pondéré situé en **feuille annexe** illustrant cette situation.
3. Montrer que : $P(S) = 0,021\,92$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3})

Partie B

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,021 92.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
 - a) la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
 - b) la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
4. a) Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,9$.
b) Interpréter le résultat obtenu.

Partie C

Dans les mêmes conditions que dans la partie B, on suppose maintenant que n personnes s'apprêtent à passer le portique. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les n personnes de ce groupe.

1. Sans justifier, donner la loi suivie par Y .
2. Justifier que $\binom{n}{0} = 1$.
3. En déduire que $P(Y = 0) = 0,97808^n$.
4. Déterminer la plus grande valeur de n tel que $P(Y = 0) \geq 0,70$. Interpréter le résultat.

Partie D

On rappelle que les statistiques de l'aéroport indiquent qu'en moyenne un passager sur 500 porte un objet métallique. Les agents de sécurité doivent faire embarquer 1 500 passagers dans l'heure qui vient.

1. Estimer combien en moyenne de ces 1 500 passagers portent un objet métallique.
2. Comme les agents de sécurité sont en retard, ils cherchent à minimiser le nombre de passagers à faire passer sous le portique de sécurité.
En gardant les données précédentes, à savoir que le portique de sécurité sonne avec une probabilité de 0,021 92, déterminer le plus petit nombre de personnes n à faire passer sous le portique de telle sorte que la probabilité qu'il sonne au moins 3 fois soit supérieur à 0,95.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie A : Conjectures

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur. On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul où figurent les valeurs de u_0 et u_1 .

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	

- Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.
- Compléter sur la **feuille annexe** les valeurs de la colonne B du tableau ci-dessus. On donnera si besoin les valeurs approchées de u_n à 10^{-3} .
- Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier n par :

- $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$
- $w_n = u_n - 7$.

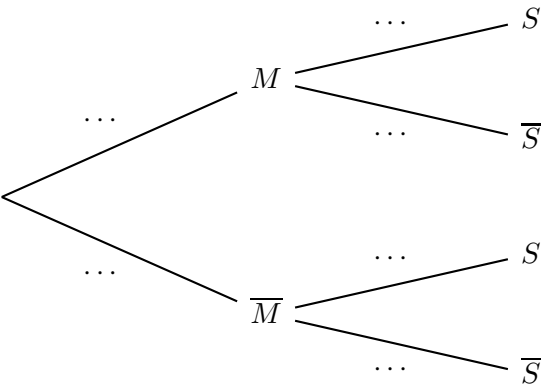
- Démontrer que la suite (v_n) est une suite constante.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$
- En utilisant le résultat de la question 1.b), montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n < u_{n+1} < 7$.
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- Ci-dessous est donnée la fonction `seuil`, écrite en Python, qui permet de calculer le rang à partir duquel u dépassera 6,999. Compléter le script de la fonction sur la **feuille annexe**

```
def seuil():
    n=0
    u=3
    while ..... :
        u=.....
        n=.....
    return(.....)
```

- Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial et la raison.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
 - Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2

(7,5 points)



EXERCICE 3

(7 points)

Partie A

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	

Partie B

```
def seuil():
    n=0
    u=3
    while ..... :
        u=.....
        n=.....
    return(.....)
```