

EXAMEN DU 7 JANVIER 2020 (2h00)

Exercice 1 (7 points)

1. Diagonaliser si c'est possible la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. En déduire A^n en fonction de n .

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + 7x^2 + 4x - 4xy + y^2 - 2y$.

1. Rechercher les points stationnaires de f et déterminer leur nature.
2. f passe-t-elle par un extremum global ?

Exercice 3 (8 points)

1. Résoudre

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

(on pourra chercher une solution particulière sous la forme $u_n^* = C$).

2. Soit v la suite définie par

$$\begin{cases} v_{n+1} = \sqrt{2v_n} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

- (a) Montrer que pour tout n on a $1 \leq v_n \leq 2$.
 - (b) Etudier la monotonie de v .
 - (c) v est-elle convergente ? Si oui, calculer sa limite.
3. On pose $a_n = \ln v_n$. Ecrire la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n . En déduire a_n en fonction de n , puis v_n en fonction de n . Retrouver alors le résultat de la question 2) c).