

Calculs vectoriels

1 Sous-espace vectoriel

Exercice 1. Combinaisons linéaires.

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des questions suivantes, déterminez s'il existe une relation entre les vecteurs donnés. Si oui, explicitez-là, sinon, justifiez.

- 1) Le vecteur u_1 est-il combinaison linéaire des vecteurs u_2 et u_3 ?
- 2) Le vecteur u_1 est-il combinaison linéaire des vecteurs u_2 et u_4 ?
- 3) Le vecteur u_1 est-il colinéaire au vecteur u_5 ?
- 4) Le vecteur $u_1 - u_4$ est-il colinéaire au vecteur u_5 ?
- 5) Le vecteur u_1 est-il combinaison linéaire de l'ensemble des vecteurs ?
- 6) Existe-t-il un vecteur parmi les cinq présentés qui soit combinaison linéaire de u_2 et u_4 ?
- 7) Existe-t-il un vecteur parmi les cinq présentés qui soit combinaison linéaire non triviale de u_2 et u_4 ? On cherche ici un vecteur $u_n = \lambda u_2 + \mu u_4$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \{1, 3, 5\}$.

Exercice 2. Sous-espaces vectoriels.

Pour tous les couples d'ensembles (E, F) suivants, déterminez si F est un sous-espace vectoriel de E .

- 1) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$.
- 2) $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{Z}$.
- 3) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.
- 4) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$.
- 5) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 1\}$.

Exercice 3. Représentation de sous-espaces.

Représentez chacun des ensembles suivants puis indiquer si s'agit ou non d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Justifiez vos réponses.

- | | |
|---|---|
| 1) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ | 5) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ |
| 2) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ | 6) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$ |
| 3) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ | 7) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x > 0\}$ |
| 4) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ | 8) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + 1\}$ |

Exercice 4. Ceci n'est pas un sous-espace vectoriel.

Pour chacun des cas suivants, montrez pourquoi l'ensemble F n'est pas un sous-espace vectoriel de E . Vous ne devrez pas utiliser la propriété indiquant que le vecteur nul est nécessairement présent dans un sous-espace vectoriel.

- 1) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$;
- 2) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- 3) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, x, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- 4) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$;
- 5) $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$;
- 6) $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^*$;
- 7) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y \leq z\}$;
- 8) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = [-1, 1]^2$;
- 9) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{Q}^3$.

Exercice 5. Ceci est un sous-espace vectoriel.

Pour chacun des cas suivants, montrez que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant directement la définition (ou la caractérisation) des sous-espaces vectoriels.

- 1) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$;
- 2) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- 3) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(0, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- 4) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x - y, x + y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;
- 5) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x e^y = 1\}$.

2 Familles de vecteurs

Exercice 6. Égalité de sous-espaces.

On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrez que $\text{Vect}(u, v)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Vect}(u', v')$.

Exercice 7. Familles génératrices.

Dans chacun des cas suivants, montrez que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E en trouvant une famille génératrice de F .

- 1) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, 3x, 7x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- 2) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, x + y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;
- 3) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x + y - 3z, x - y + 7z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$;
- 4) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$;
- 5) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$;
- 6) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3z = 0 \text{ et } y - 7z = 0\}$.

Exercice 8. Espace vectoriel engendré par une famille.

Dans chacun des cas suivants, écrivez le sous-espace vectoriel F de E en extension puis en compréhension. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \text{Vect}((1, 0))$, vous devez écrire

$$F = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$

- 1) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 0))$;
- 2) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$;
- 3) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, -1))$;
- 4) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((3, 1, 1, 0), (-1, 0, 7, 1))$;
- 5) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \text{Vect}((0, 0))$.

Exercice 9. Libre ou liée ?

Pour chacune des familles suivantes, indiquez si la famille est liée ou libre dans E . Justifiez.

- 1) $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F} = ((-1, 1), (-2, 2))$.
- 2) $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F} = ((0, 0), (1, 0), (0, 1))$.
- 3) $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2))$.
- 4) $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (3, 1, 3), (2, -1, 0))$.

Exercice 10. Pivot de Gauss et familles.

Ré-écrivez les égalités données dans les définitions des familles libres et liées sous la forme de système d'équations. Déduisez-en comment un pivot de Gauss peut permettre de déterminer l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs.

Déterminez ensuite, à l'aide d'un pivot de Gauss, si la famille $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (2, 1, 0))$ est libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$. Même question avec la famille $((1, 1, 1), (2, -1, 0), (2, 1, 1))$.

Exercice 11. Pivot de Gauss et familles.

Dans $\mathbb{R}^2$, existe-t-il des réels x pour lesquels la famille $((3, 2), (-5, 0), (1, x))$ est libre ? Si oui, déterminez-les.

Même question avec la famille $((3, 2), (-5, x))$.

Exercice 12. Familles d'inconnus.

Soit $\mathcal{F} = (u, v, w)$ une famille libre d'un espace vectoriel réel quelconque E .

- 1) La famille $(u, u + v, u + v + w)$ est-libre ou liée. Justifiez.
- 2) Même question pour la famille $(u + v, v + w, w + u)$.
- 3) Même question pour la famille $(u, v - w, 0_E)$.

3 Bases

Exercice 13. Base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Montrez que la famille de vecteurs $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14. Vous n'avez pas les bases.

Donnez une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants.

- 1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$;
- 2) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$;
- 3) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y = 0\}$;
- 4) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = 2z\}$.

Exercice 15. Détermination de bases.

Dans chacun des cas suivants, trouvez une famille génératrice du sous-espace vectoriel F de E . Déterminez ensuite les vecteurs redondants pour en déduire une base de F .

- 1) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x + y - z, x - y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$;
- 2) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x - y - z, x + y + 3z, 2y + 3z - x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 16. Application de la proposition.

Montrez que les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ suivants sont égaux.

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\},$$
$$G = \text{Vect}(u, v) \text{ avec } u = (1, 1, 1) \text{ et } v = (2, 1, -1).$$

Exercice 17. Complétion de base.

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $u = (2, -3, 1)$, $v = (1, 2, -3)$ et $w = (3, -1, -2)$.

- 1) Déterminez le rang de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$.
- 2) Donnez une base du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u, v, w)$.
- 3) Complétez la base déterminée précédemment en une base de $\mathbb{R}^3$.