

EXERCICE I (Effet Doppler)

L'atome d'hydrogène est largement présent dans les galaxies. Après excitation (par le rayonnement d'une étoile par exemple), il retourne à son état fondamental en émettant une onde électromagnétique de longueur d'onde $\lambda=21\text{cm}$ et qui se propage à la vitesse de la lumière $c=3.10^8\text{m/s}$.

1) Calculer la fréquence de cette onde électromagnétique

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8}{0,21} \approx 14,3.10^8 \text{ Hz}$$

2) On mesure sur Terre la fréquence de l'onde émise par des atomes d'hydrogène d'une galaxie lointaine. On obtient $\lambda'=14.10^8 \text{ Hz}$. Cette valeur, différente de celle correspondant à l'émission de l'atome d'hydrogène au repos, résulte d'un effet Doppler. En effet, cette galaxie est en mouvement par rapport à la nôtre (et donc la Terre). On néglige les effets relativistes, c'est-à-dire que l'on considère que cette modification de fréquence obéit à la relation Doppler classique.

a) Est-ce que la galaxie s'éloigne ou se rapproche de la Terre (ne seront pris en compte que les résultats justifiés).

$$\nu' < \nu \Rightarrow \text{La galaxie s'éloigne de la Terre}$$

b) On considère que la vitesse de la Terre est nulle. Calculer v_g , la vitesse de cette galaxie (on justifiera les valeurs utilisées dans la relation Doppler).

Le récepteur est sur la Terre. La source est liée à la galaxie. L'onde se déplace de la galaxie vers la Terre. La galaxie s'éloigne de la Terre. On a donc

$$v_r=0, v_g=v_s \text{ et } \theta_s = \pi$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v_r}{c} \cos(\theta_r)}{1 - \frac{v_s}{c} \cos(\theta_s)} = \nu \frac{1}{1 + \frac{v_g}{c}} \Rightarrow 1 + \frac{v_g}{c} = \frac{\nu}{\nu'} \Rightarrow v_g = c \left(\frac{\nu}{\nu'} - 1 \right) \approx 0,065.10^8 = 6,5.10^6 \text{ m/s}$$

- c) La vitesse de la Terre dans le référentiel du Soleil est de 30 km/s. Justifiez pourquoi l'approximation précédente (vitesse de la Terre nulle) est raisonnable.

Les termes intervenants dans la relation Doppler sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_r}{c} = \frac{v_T}{c} = \frac{30 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 10^{-4} \\ \frac{v_s}{c} = \frac{v_g}{c} = \frac{6,5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} \approx 2 \cdot 10^{-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_T}{c} \text{ est de l'ordre de } \left(\frac{v_g}{c} \right)^2$$

- d) Question bonus : La vitesse de la Terre dans le référentiel ayant pour origine le centre de l'univers est de l'ordre 600 km/s. L'approximation précédente (vitesse de la Terre nulle) est-elle toujours raisonnable (on justifiera la réponse).

Les termes intervenants dans la relation Doppler sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_r}{c} = \frac{v_T}{c} = \frac{60 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 10^{-3} \\ \frac{v_s}{c} = \frac{v_g}{c} = \frac{6,5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} \approx 2 \cdot 10^{-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_T}{c} \text{ est de l'ordre de } \frac{1}{20} \left(\frac{v_g}{c} \right), \text{ c'est raisonnable mais limite}$$

EXERCICE II (ondes acoustiques)

On considère un axe Ox sur lequel on place en $x = 0$ un haut-parleur vibrant à une fréquence de 33 Hz. Il en résulte une onde plane acoustique qui se propage dans la direction des x croissants.

- a) Calculer la pulsation ω , le vecteur d'onde k et la longueur d'onde λ sachant que la vitesse du son dans l'air est de 330 m/sec (on n'oubliera pas les unités)

$$\omega = 2\pi\nu = 207,34 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2 \cdot 3,1416 \cdot 33}{330} = \frac{2\pi}{10} \approx 0,628 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 10 \text{ m}$$

b) La surpression maximale est de $P_0 = 10^{-2}$ Pa. Exprimer sous forme complexe l'équation de l'onde acoustique en fonction de x et t . L'exprimer ensuite sous forme réelle en choisissant comme origine temporelle l'instant où la surpression est maximum ($+10^{-2}$ Pa) au niveau du haut-parleur.

$$\begin{aligned}
 P(x,t) &= P_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = 0.01 e^{i(207,35t - 0,628x + \varphi)} \\
 P(x,t) &= \text{Re}\left(P_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}\right) = P_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = 0.01 \text{Re}\left(e^{i(207,35t - 0,628x + \varphi)}\right) \\
 \left. \begin{aligned} P(0,0) &= P_0 \\ P(0,0) &= P_0 \cos(\varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 2n\pi, \varphi = 0 \\
 P(x,t) &= 0.01 \cos(207,35t - 0,628x) \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

c) Exprimer sous forme complexe, puis réelle, les équations horaires des points situés à 2,5 m, 5 m et 10 m du haut-parleur en conservant les mêmes conditions initiales qu'à la question précédente. Indiquer leur déphasage (en phase, opposition de phase ou quadrature) par rapport à l'origine.

$$\begin{aligned}
 P(2,5,t) &= P\left(\frac{\lambda}{4}, t\right) = 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{5}{2}\right)} = 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{k\lambda}{4}\right)} = 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \\
 \Rightarrow P(2,5,t) &= 10^{-2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{Pa}; \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{quadrature} \\
 P(5,t) &= P\left(\frac{\lambda}{2}, t\right) = 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi}{10} \cdot 5\right)} = 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{k\lambda}{2}\right)} = 10^{-2} \cdot e^{i(\omega t - \pi)} \\
 \Rightarrow P(5,t) &= 10^{-2} \cdot \cos(\omega t - \pi) \cdot \text{Pa}; \Delta\varphi = \pi \Rightarrow \text{opposition de phase} \\
 P(10,t) &= 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi}{10} \cdot 10\right)} = P(\lambda, t) = 10^{-2} \cdot e^{i(\omega t - k\lambda)} = 10^{-2} \cdot e^{i(\omega t)} \Rightarrow P(10,t) = 10^{-2} \cos(\omega t) \text{ Pa} \\
 ; \Delta\varphi &= 0 \Rightarrow \text{en phase}
 \end{aligned}$$

d) On place à $x = -2,5 \text{ cm}$, (donc en amont) de ce haut-parleur, un second haut-parleur émettant un signal identique et se propageant dans la même direction. On suppose que cette seconde onde sonore traverse le premier haut-parleur sans être perturbée. Montrer que le signal résultant de la somme des ondes émises par ces deux hauts parleur est une onde plane que l'on peut écrire sous la forme $P(x,t) = P_1 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$, P_1 et φ étant des grandeurs que l'on calculera.

$$P_1(x,t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$P_2(x,t) = P_0 e^{i(\omega t - k(x+2,5))}$$

$$P(x,t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)} + P_0 e^{i(\omega t - k(x+2,5))} = P_0 e^{i(\omega t - kx)} (1 + e^{-i2,5k})$$

$$k = \frac{2\pi}{10} \Rightarrow 2,5k = \frac{\pi}{2}$$

$$P(x,t) = P_0 \left(1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} \right) e^{i(\omega t - kx)} = (1 - i) \cdot P_0 e^{i(\omega t - kx)} = \sqrt{2} \cdot P_0 e^{i\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{2} \cdot P_0 \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

e) On déplace le second H.P. à $x = -5 \text{ m}$. Calculer la nouvelle amplitude de l'onde résultante.

$$P_1(x,t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$P_2(x,t) = P_0 e^{i(\omega t - k(x+5))}$$

$$P(x,t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)} + P_0 e^{i(\omega t - k(x+5))} = P_0 e^{i(\omega t - kx)} (1 + e^{-i5k})$$

$$k = \frac{2\pi}{10} \Rightarrow 5k = \pi$$

$$P(x,t) = P_0 \cdot (1 + e^{-i5k}) \cdot e^{i(\omega t - kx)} = P_0 \cdot (1 + e^{-i\pi}) \cdot e^{i(\omega t - kx)} = P_0 \cdot (1 - 1) \cdot e^{i(\omega t - kx)} = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned} |P(x,t)|^2 &= P_0^2 (1 + e^{-i5k})(1 + e^{i5k}) = 2P_0^2 (1 + \cos(5k)) = 2P_0^2 \left(1 + \cos\left(5 \frac{2\pi}{\lambda}\right) \right) \\ &= 2P_0^2 (1 + \cos(\pi)) = 0 \end{aligned}$$

f) Justifier votre résultat

La seconde source, placée à 5m est distante d'une demi longueur d'onde (10m) de la première. Les deux sources se trouvent donc en opposition de phase. Le signal émis étant identique dans chaque cas, la résultante est nulle.

g) Le second haut-parleur est maintenant placé face au premier, à $x = 20 \text{ m}$. Il émet donc une onde acoustique dans la direction opposée à celle émise par le premier. Ecrire l'équation de l'onde sonore résultante des deux haut-parleurs

$$P(x,t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)} + P_0 e^{i(\omega t + k(x+20))}$$

De quel type d'onde s'agit-il ? **justifier votre réponse** (sans calcul)

Une onde stationnaire car c'est la somme de deux ondes de pulsations égales et se propageant dans des directions opposées.

h) Où faut-il se placer pour n'entendre aucun son ?

Aux nœuds de l'onde stationnaire, c'est à dire tous les $\lambda/2 = 5\text{m}$ à partir des sources.

i) Combien de positions répondent à cette condition (pas de son audible) ?

En comptant les hauts parleurs, cette condition est remplie pour $x = 0, 5, 10, 15 \text{ et } 20 \text{ m}$, il y a donc 5 positions (3 si, logiquement, on exclue les H.P.).