

Année 2019-2020

L2 Semestre 3
Session I

Faculté des Sciences
Fondamentales et Biomédicales
Faculté de Pharmacie de Paris

Corrigé de l'examen de l'U.E. SA03M050

Mathématiques Appliquées

Lundi 16 décembre 2019

Durée : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde et de complément de réponse incluses).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- **On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.**
- **Les calculatrices sont interdites.**

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Exercice 1

Soit les matrices : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{4}(I + P) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, où I est la matrice identité de dimension 3×3 .

Partie A

1) Déterminer, si elles existent, les matrices inverses de la matrice P et de la matrice Q .

* Pour la matrice P :

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ car au moins deux colonnes (ou lignes) de la matrice } P \text{ sont identiques.}$$

La matrice P n'est donc pas inversible.

* Pour la matrice Q :

$$\begin{aligned} C_1 &\leftarrow C_1 - C_2 - C_3 \\ \det Q &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times (2+2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \neq 0 \\ C_2 &\leftarrow C_2 - C_3 \end{aligned}$$

La matrice Q est donc inversible.

Cherchons son inverse à l'aide de la formule : $Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} (\text{Com} Q)^T$.

- Déterminons tout d'abord la comatrice de Q :

$$\text{Com } Q = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

N.B. : le chiffre $(1/4)$ se factorise au carré et non à la puissance 1, car une fois distribué dans la matrice Q , il apparaît ensuite dans chaque déterminant 2×2 de la comatrice, en facteur des 2 colonnes (ou lignes) et se factorise donc au carré dans chacun des 9 cofacteurs de la comatrice de Q . Il ne reste ensuite plus qu'à le factoriser et à le sortir de la comatrice.

- Finalement : $Q^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T \Rightarrow \boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}.$

- On vérifie que :

$$QQ^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3 \times 3} = I.$$

Partie B

2) Calculer P^2 . Exprimer le résultat en fonction de P . En déduire PQ et QP en fonction de P .

$$* P^2 = PP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3P \Rightarrow \boxed{P^2 = 3P}.$$

$$* PQ = P \cdot \frac{1}{4}(I + P) = \frac{1}{4}(PI + P^2) = \frac{1}{4}(P + 3P) = \frac{1}{4}4P = P \Rightarrow \boxed{PQ = P}.$$

$$* QP = \frac{1}{4}(I + P)P = \frac{1}{4}(IP + P^2) = \frac{1}{4}(P + 3P) = \frac{1}{4}4P = P \Rightarrow \boxed{QP = P}.$$

3) Déduire de la question précédente que la matrice Q est inversible et l'expression de sa matrice inverse Q^{-1} en fonction de P et I . Calculer Q^{-1} . Le résultat est-il en accord avec celui obtenu à la question 1 ?

* D'après la définition de la matrice Q , on peut déduire : $4Q = I + P$, d'où : $4Q - P = I$.

* D'après la question précédente, on peut remplacer P par QP , soit : $4Q - QP = I$.

En factorisant par la matrice Q , on a : $Q(4I - P) = I$.

Or si Q admet une matrice inverse, celle-ci est unique et telle que : $QQ^{-1} = I$.

On en déduit : $\boxed{Q^{-1} = 4I - P}$.

* Calcul de Q^{-1} :

$$Q^{-1} = 4I - P = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien le résultat obtenu à la question 1.

Partie C

4) Résoudre le système (S) :
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y + z) = 1 \\ y = z \\ x = 1 - y - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1/4 \\ y = z = 1/4 \\ x = 1 - 3/4 = 1/4 \end{cases}$$

Le système (S) admet donc une unique solution : $\{(1/4 ; 1/4 ; 1/4)\}$.

5) Donner une écriture matricielle du système (S), faisant intervenir la matrice Q . En déduire à nouveau la solution du système (S).

Soit la matrice A telle que : $AX = B$, avec : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc : $A = 4Q$.

Le système admet donc comme écriture matricielle : $4QX = B$.

En multipliant à gauche par Q^{-1} cette égalité, on obtient : $4Q^{-1}QX = Q^{-1}B \Leftrightarrow 4X = Q^{-1}B$.

$$\text{D'où : } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}Q^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien le même résultat qu'à la question 4.

Exercice 2

PARTIE A

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle symétrique ? Justifier la réponse.

$A^T = A$ donc A est symétrique.

2) Calculer le déterminant de la matrice A . Conclure.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

La matrice A est donc inversible.

3) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ associé à la matrice A . En déduire que les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 7$. On précisera leur multiplicité.

Le polynôme caractéristique associé à la matrice A est donné par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

soit, en factorisant par $(1-\lambda)$, qui apparaît comme un facteur commun sur la 3^e ligne (cf propriétés du déterminant vues en cours) :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ en remplaçant}$$

C_2 par $C_2 + C_3$.

En développant par rapport à la 3^e ligne le déterminant, on obtient :

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}$$

puis en factorisant à nouveau par $(1-\lambda)$, qui apparaît comme un facteur commun sur la 2^e ligne :

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \times \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \times (3-\lambda+4) = \underline{(1-\lambda)^2 \times (7-\lambda)}.$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 1$ (vp double) et $\lambda_2 = 7$ (vp simple).

4) Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres de A .

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$:

$$\text{Ils vérifient : } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit le système : } \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

On a donc : $x + y + z = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = -x - y}$.

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est donc :

$$\{Y_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathfrak{R} - \{(0,0)\} \right\}.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 7$:

Ils vérifient : $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit le système : $\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$.

On a : $\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 6x - 6y = 0 \\ 6x - 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \\ -4x + 2x + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}}.$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 7$ est donc :

$$\{Y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathfrak{R}^* \right\}.$$

PARTIE B

On considère un système physique dont les seules énergies possibles sont les valeurs propres de la matrice H (hamiltonien) qui s'écrit sous la forme : $H = E \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = E A$, où E est une constante strictement positive qui a la dimension d'une énergie.

5) En vous servant des résultats de la partie A, déduire les énergies possibles du système en fonction de E .

Les valeurs propres λ de H sont telles qu'il existe un vecteur Y non nul, tel que : $HY = \lambda Y$.

Or on sait que $AY_i = \lambda_i Y_i$, avec $\lambda_i = \lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 7$, et $Y_i = Y_1$ ou Y_2 respectivement (cf q 4).

Ainsi : $HY_i = EAY_i = E\lambda_i Y_i$

$\Rightarrow E\lambda_i$ est valeur propre de la matrice H associée au vecteur propre Y_i .

Les énergies possibles du système sont donc E et $7E$.

6) Le système est préparé dans l'état : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la valeur moyenne de l'énergie du système dans cet état, donnée par : $\langle H \rangle = {}^t U H U$, où ${}^t U$ désigne la transposée de la matrice U .

$$\langle H \rangle = {}^t U H U = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3E.$$

Ainsi : $\boxed{\langle H \rangle = {}^t U H U = 3E}$.

7) Déterminer l'écart quadratique moyen sur la mesure de H dans cet état, donné par : $\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$, où : $\langle H^2 \rangle = {}^t U H^2 U$, avec ${}^t U$ la transposée de la matrice U .

$$\begin{aligned} * \langle H^2 \rangle &= {}^t U H^2 U = {}^t U H H U = E^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \langle H^2 \rangle &= {}^t U H^2 U = E^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = E^2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 17E^2 \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{\langle H^2 \rangle = {}^t U H^2 U = 17E^2}$.

* Ecart quadratique moyen : $\boxed{\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{17E^2 - 9E^2} = \sqrt{8E^2} = 2\sqrt{2}E}$.