

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
CONCOURS D'ADMISSION 2019

JEUDI 25 AVRIL 2019 - 08h00 – 13h00

FILIÈRE PC - Épreuve n°9

COMPOSITION DE PHYSIQUE-CHIMIE
(L)

Durée : 5 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.



Cette épreuve comprend deux parties indépendantes. La première, dédiée à la physique, étudie la réponse d'un pendule simple à une excitation paramétrique, c'est-à-dire agissant sur l'un des paramètres de ce système mécanique. La seconde se rapporte à la chimie et s'intéresse à la stabilité des composés du chlore. Il est conseillé de ne pas consacrer plus de deux heures et trente minutes par partie.

Partie Physique

Excitation paramétrique et stabilisation dynamique d'un pendule

Nous nous proposons d'étudier la réponse d'un pendule simple dont le point auquel il est suspendu est mis en mouvement oscillant verticalement.

Nous considérons un pendule (2) constitué d'une masse m fixée à une extrémité M d'une tige rigide, de longueur ℓ , en rotation autour d'un point pivot A (se reporter à la figure (1)). Par une action extérieure, l'élément (1) auquel le pendule est suspendu, peut être mis en mouvement vertical, par rapport au support (0). Ce système mécanique est soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{u}_z$. Nous notons θ l'angle repérant angulairement ce pendule. Le référentiel d'observation $\mathcal{R}_0(O, \vec{u}_z, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est supposé galiléen. Le repère $\mathcal{R}_1(A, \vec{u}_z, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, solide de l'élément (1), est en mouvement de translation selon l'axe (Oz) lorsque le pivot A est mis en mouvement. Nous notons $\vec{OA} = h\vec{u}_z$. Enfin, nous ne prenons en compte aucune cause de dissipation.

La première partie de cette étude porte sur l'amplification de l'amplitude des oscillations du pendule autour de l'angle nul. La seconde partie propose une analyse des conditions d'oscillation autour de l'angle π . Nous ne nous placerons dans la limite des petits angles que lorsque cela sera précisé.

Données :

- $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $\ell = 20 \text{ cm}$
- $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

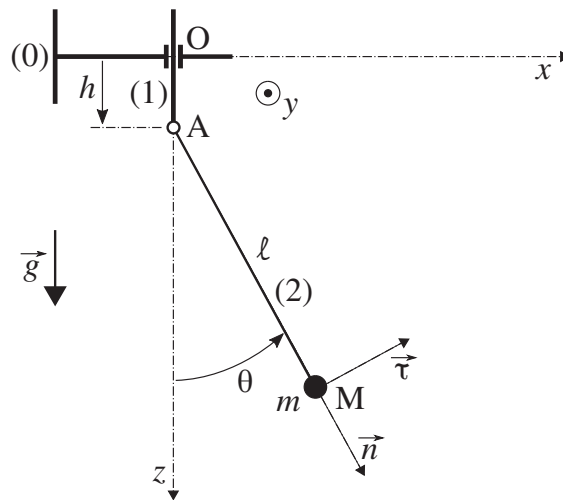


FIGURE 1 – Pendule (2) (m, ℓ) oscillant autour du point A. Ce point peut être animé d'un mouvement selon l'axe (Oz), relativement au référentiel galiléen d'observation $\mathcal{R}_0$, par une action extérieure (action sur le paramètre géométrique h).

1 Excitation paramétrique d'un pendule simple.

Dans cette partie nous cherchons à déterminer sous quelles conditions il devient possible d'accroître l'amplitude d'oscillation du pendule en agissant périodiquement sur le paramètre géométrique h .

1. Préciser à quelles conditions nous pouvons considérer ce pendule, *a priori* pesant, comme un pendule simple. Si besoin, on introduira, en les définissant, les paramètres qui apparaîtront nécessaires.

Dans toute la suite, nous nous placerons dans ce cadre.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la variable θ dans la situation où le point A est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}_0$. Nous poserons $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.
3. Calculer la valeur numérique de la période T_0 des oscillations dans la limite des petits angles.
4. Dédire, directement du résultat obtenu à la question (2), l'équation différentielle vérifiée par la variable θ dans le cas général où $h = h(t)$. On fera apparaître la pulsation ω_0 et la variable $G = \ddot{h}/g$.
5. Établir l'expression de la réaction $\vec{R}$ que l'élément (1) exerce sur le pendule (2) par l'intermédiaire du pivot A. On exprimera les composantes de cette force dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ et on fera apparaître les variables G et $U = \dot{\theta}^2/\omega_0^2$.
6. En déduire l'expression de la réaction $\vec{R}$, développée jusqu'au deuxième ordre par rapport aux variables θ et $\dot{\theta}/\omega_0$. On exprimera les composantes de cette force dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.
7. Exprimer la puissance instantanée $P(t)$ que l'opérateur agissant sur le pivot A fournit au pendule, développée jusqu'au deuxième ordre par rapport aux variables θ et $\dot{\theta}/\omega_0$. On vérifiera qu'elle s'exprime :

$$P(t) = -mg \{ (1 - G)(1 - \theta^2) + U \} \dot{h} \quad (1)$$

C'est sous cette forme développée à l'ordre deux que la puissance interviendra dans toute la suite.

- L'opérateur extérieur impose un mouvement vertical oscillant au pivot A décrit par l'équation horaire :

$$h(t) = a \sin(\Omega t + \phi) \quad (a = \text{Cste} \geq 0, \Omega = \text{Cste} \geq 0, \phi = \text{Cste}) \quad (2)$$

La phase ϕ positionne temporellement cette excitation par rapport à l'évolution $\theta = \theta(t)$ du pendule.

8. Exprimer la puissance instantanée $P(t)$ dans le cas $|G| \ll 1$ et en adoptant l'évolution $\theta = \theta(t)$ du régime des petits angles :

$$\theta(t) = A \sin \omega_0 t \quad (A \geq 0) \quad (3)$$

9. Nous nous intéressons à la puissance moyenne $P_m(t)$ de la puissance instantanée $P(t)$ sur l'intervalle temporel glissant $[t, t + T_0]$.

- Déterminer à quelle condition, portant sur le rapport $k = \Omega/\omega_0$, cette puissance moyenne comprend une composante constante susceptible d'être non nulle sur tout intervalle de ce type. On exprimera alors P_m , dans ce cas.
- Préciser alors la valeur de la phase ϕ assurant le plus efficacement l'amplification de l'amplitude des oscillations du pendule.
- Donner, sous ces deux conditions, l'expression P_m^* de P_m , en fonction des paramètres m, g, a, ω_0 et A .

Pour ces calculs, nous considérerons que A reste (sensiblement) constant sur l'échelle de temps T_0 .

10. Pour la valeur de k déterminée en réponse à la question (9), indiquer quelle serait l'influence sur P_m du terme G que nous avons négligé devant l'unité (question (8)).
- La figure (2) représente la réponse $\theta = \theta(t)$ du pendule à une excitation de la forme de celle donnée par l'équation (2) et pour les conditions d'excitation les plus favorables définies en réponse à la question (9).

11. À partir des résultats obtenus précédemment, établir l'équation $A = A(t)$ de l'enveloppe des oscillations observables sur la figure (2), au début de la phase de croissance. Nous supposons que la variation de l'amplitude A est lente par rapport à celle de l'angle θ (hypothèse H_τ). En notant τ_A le temps caractéristique qui apparaît, exprimer le rapport T_0/τ_A en fonction du rapport a/ℓ .

12. En précisant la méthode mise en œuvre, extraire de la figure (2) une estimation du rapport T_0/τ_A .

13. L'hypothèse H_τ paraît-elle satisfaite ?

14. Sur la figure (2) on observe, qu'après la phase de croissance attendue, il apparaît un infléchissement puis une phase de décroissance. Expliquer qualitativement l'origine de cet effet.

15. On peut également accroître l'amplitude des oscillations d'un pendule en faisant varier sa longueur ℓ périodiquement. On substitue alors à la tige une corde passée dans un anneau servant de point-pivot. D'après les résultats précédents, préciser quand il faut raccourcir la corde et quand il faut l'allonger pour réaliser cette amplification. Cette réponse doit être accompagnée d'une argumentation.

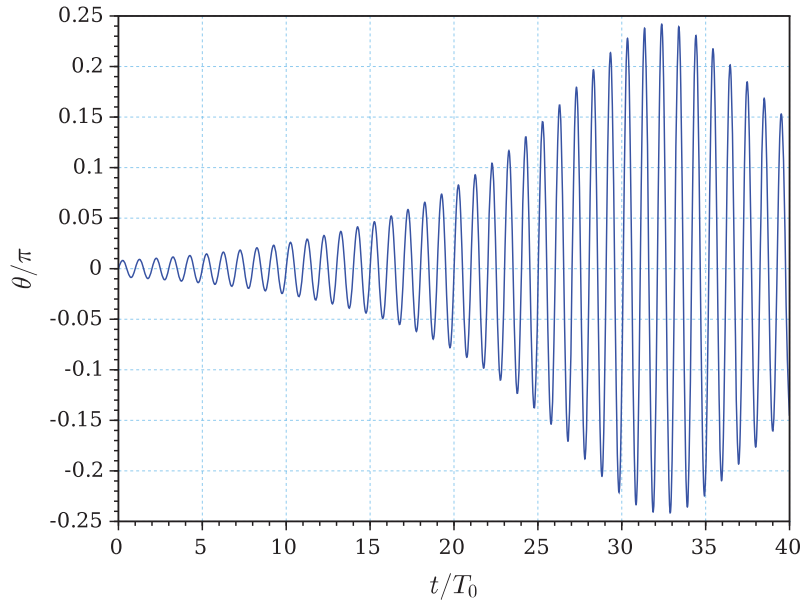


FIGURE 2 – Réponse du pendule à un mouvement oscillant du pivot A (équation (2)), dans les conditions optimales définies question (9).

2 Stabilisation dynamique : pendule inversé.

Nous nous proposons d'étudier les conditions d'oscillation du pendule autour de l'angle π . L'opérateur extérieur impose alors au pivot A un mouvement vertical oscillant rapide, mais de faible amplitude, décrit par l'équation horaire :

$$h(t) = a \sin \psi \quad \text{où} \quad 0 \leq a = \text{Cste} \ll \ell, \quad \psi = \Omega t + \phi, \quad \Omega = \text{Cste} \gg \omega_0, \quad \phi = \text{Cste} \quad (4)$$

La figure (3) représente deux évolutions $\theta = \theta(t)$ correspondant aux mêmes paramètres d'excitation mais à des conditions initiales légèrement différentes. Pour l'une $CI_1(\theta(0) = 4\pi/10; \dot{\theta}(0) = 0)$ et pour l'autre $CI_2(\theta(0) = 6\pi/10; \dot{\theta}(0) = 0)$.

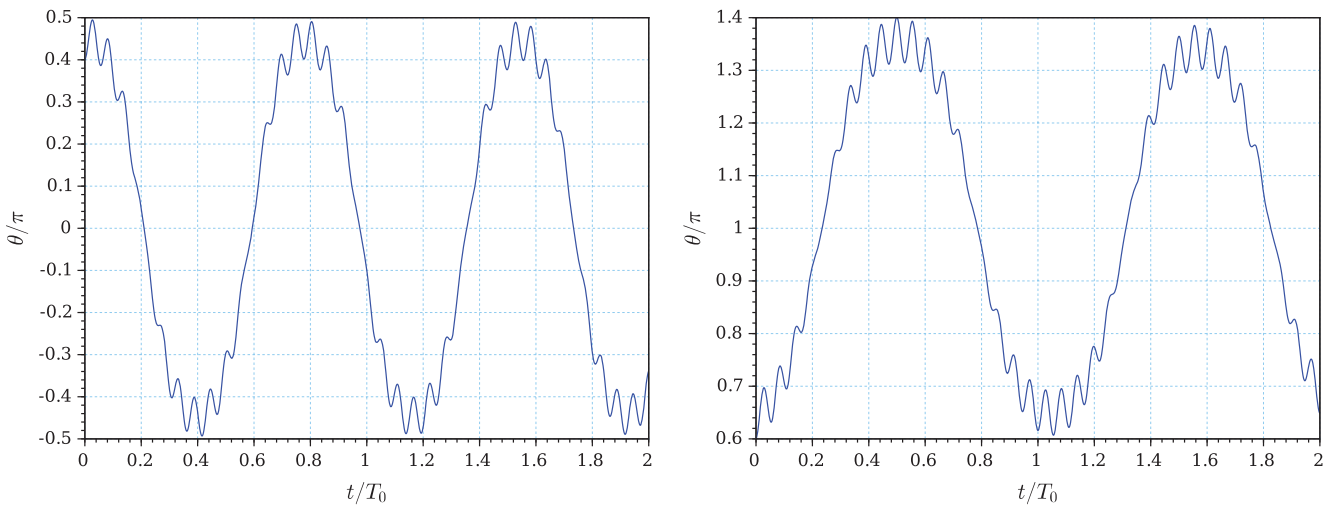


FIGURE 3 – Réponses du pendule à la même excitation oscillante $h = h(t)$ du pivot A, mais pour des conditions initiales différentes.

70 **16.** Associer, à chacune des évolutions gauche et droite de la figure (3), la condition initiale CI_1 ou CI_2 qui lui correspond. Analyser ces évolutions.

17. Extraire, des évolutions de la figure (3), la valeur de la période d'excitation $T_{\text{ex}} = 2\pi/\Omega$.

- Les évolutions présentées figure (3) font apparaître deux temps caractéristiques ce qui incite à décomposer la réponse $\theta = \theta(t)$ du pendule en deux termes :

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) \quad (5)$$

La composante θ_1 est la contribution oscillante de haute fréquence (pulsation Ω) qui apparaît sur ces évolutions. La composante θ_0 est assimilée à la moyenne de la variable θ sur T_{ex} . Il s'agit d'une composante de basse fréquence à laquelle nous associerons, *a priori*, la pulsation caractéristique ω_0 . Son amplitude est supposée nettement supérieure à celle de θ_1 .

Pour un pendule ainsi excité, nous rappelons que l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ prend la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + G_0 \sin \psi) \sin \theta = 0 \quad \text{où} \quad G_0 = \frac{a\Omega^2}{g} \quad (6)$$

2.1 Analyse qualitative.

18. Justifier que la forme de l'équation (6) permet d'envisager, *a priori*, l'existence de solutions oscillantes autour de l'angle π (tout au moins, de ne pas exclure d'emblée cette éventualité).

19. Nous admettons (ce que nous justifierons par la suite) que la composante de haute fréquence est de la forme :

$$\theta_1 = \varepsilon_1 \sin \psi \quad \text{où} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\theta_0) \quad \text{et} \quad |\varepsilon_1| \ll 1 \quad (7)$$

80 Exprimer le moment algébrique moyen $\Gamma(\theta_0)$, par rapport au point mobile A, auquel le pendule est soumis, pour l'angle θ_0 . Nous définissons ce moment moyen simplement comme la demi-somme des moments correspondants à $\psi = -\pi/2$ et $\psi = +\pi/2$. On exprimera ce moment en fonction de $\Gamma^* = m\ell^2 \omega_0^2$, G_0 , θ_0 et ε_1 . Ces calculs seront menés au premier ordre par rapport à ε_1 .

85 **20.** En raisonnant pour $\theta_0 \in]\pi/2, \pi[$, préciser à quelle condition l'excitation est susceptible de contrebalancer l'effet de la gravité.

21. Justifier que, pour espérer obtenir une solution oscillante autour de l'angle π , ε_1 doit être une fonction positive sur l'intervalle $]\pi/2, \pi[$ et qu'elle doit changer de signe pour $\theta_0 = \pi$.

2.2 Interprétation énergétique.

90 Il s'agit, dans un premier temps, d'accéder à la dépendance de la fonction θ_1 par rapport à $h(t)$ et $\theta_0(t)$, dans la limite $a \ll \ell$ et $\Omega \gg \omega_0$. Dans ce cadre, lors du mouvement du pivot A, nous considérons que le point M se déplace selon la direction instantanée (OM_0) orientée par l'angle θ_0 . Cela revient à considérer le mouvement du pendule autour du point O selon la dynamique fixée par l'évolution $\theta_0(t)$ et que la correction angulaire $\theta_1(t)$ s'obtient par le déplacement du point A entraînant le point M dans l'axe de la tige. L'angle θ_0 restant figé sur l'échelle de temps T_{ex} ($\Omega \gg \omega_0$). Ce scénario est illustré par la figure (4) où $\alpha_0 = \theta_0 - \pi/2$ et $\alpha = \alpha_0 + \theta_1$.

22. À partir de la figure (4), établir que l'angle θ_1 s'exprime, au premier ordre relativement au rapport a/ℓ :

$$\theta_1 = \frac{a}{\ell} \sin \theta_0 \sin \psi \quad (8)$$

23. En introduisant dans l'équation (6) la solution $\theta = \theta_0 + \theta_1$ avec la composante θ_1 précédemment déterminée, puis en effectuant la moyenne sur T_{ex} , établir que l'équation différentielle alors vérifiée par l'angle θ_0 s'écrit (toujours dans le cadre des hypothèses adoptées) :

$$\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2 (\sin \theta_0 + Q \sin 2\theta_0) = 0 \quad (9)$$

95 où le facteur constant positif Q est à exprimer en fonction des rapports a/ℓ et Ω/ω_0 .

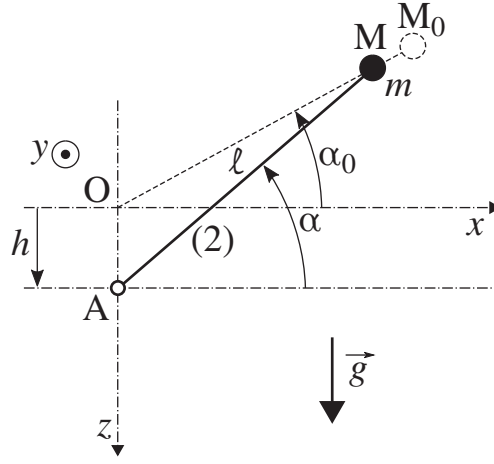


FIGURE 4 – Pendule (2) (m, ℓ) soumis à l’excitation du point A induisant une modulation de son mouvement angulaire.

24. Proposer un argument en faveur de la forme de l’équation (9).
25. Dédurre de l’équation (9) le potentiel effectif $E_{\text{eff}}(\theta_0)$ qui lui est associé. Il s’agit du potentiel auquel est soumis le système dynamique fictif dont l’évolution serait décrite par la variable angulaire θ_0 . On l’écrira sous la forme :

$$E_{\text{eff}}(\theta_0) = E_{\text{eff}}^* f(\theta_0) \quad (10)$$

La grandeur E_{eff} , positive et homogène à une énergie, est à exprimer en fonction de m , ℓ et ω_0 . La fonction f est paramétrée par la seule grandeur Q . On la choisira telle que le potentiel effectif E_{eff} s’annule pour $\theta_0 = 0$, dans le cas $Q = 0$.

- 100 • La figure (5) représente graphiquement la fonction f pour la valeur du paramètre Q correspondant aux évolutions de la figure (3).

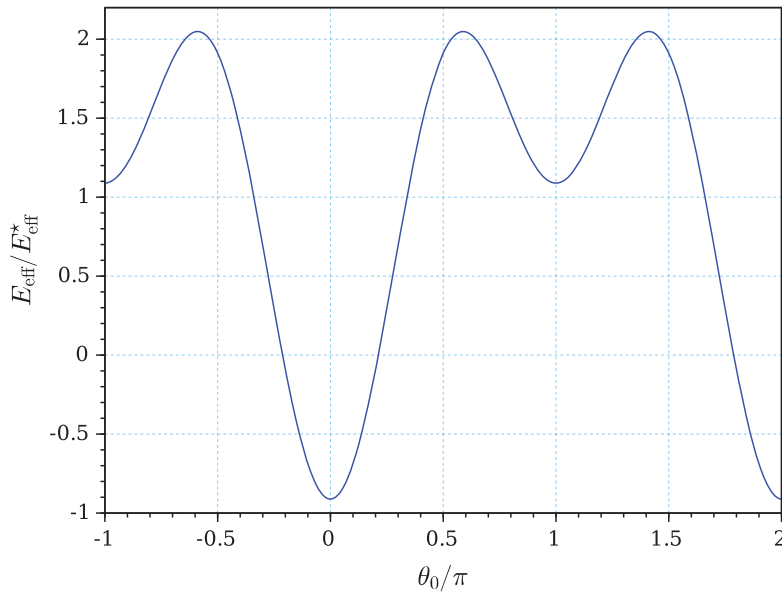


FIGURE 5 – Représentation graphique de la fonction f pour la valeur du paramètre Q correspondant aux évolutions de la figure (3).

26. Analyser les deux évolutions représentées figure (3) à partir du profil de ce potentiel.

27. Expliquer brièvement pourquoi la période de la composante de basse fréquence de l'évolution gauche de la figure (3) est inférieure à celle de l'évolution droite.
- 105 28. Dans le cas général, déterminer à quelle condition, portant sur le paramètre Q , il devient possible d'observer des oscillations autour de l'angle π , si toutefois les conditions initiales sont bien choisies.
29. Vérifier, à partir de la représentation graphique de la fonction f , que cette condition est effectivement satisfaite. On estimera pour cela le rapport Q/Q_c .
- 110 30. Associer à l'évolution de la composante θ_0 autour de l'angle 0 une pulsation caractéristique ω_b^* , puis à celle autour de l'angle π une pulsation caractéristique ω_h^* . On exprimera ces grandeurs en fonction de ω_0 et Q . Indiquer alors quelle hypothèse ce résultat est susceptible de remettre en cause.
31. Expliquer pourquoi la démarche adoptée qui a conduit à la détermination du potentiel effectif ne permet pas d'étudier l'influence de la phase ϕ sur l'évolution de l'angle θ .