MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2018

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1.$$

1. a) La matrice A qui représente f donne : $f(e_1) = -2e_2 + e_3$, donc $v = e_1 - 2e_2 + e_3 = (1, -2, 1)$.

b) La famille $\mathscr{C} = (u, v, e_1)$ contient trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 : il suffit donc, pour que $\mathscr{C}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$, que cette famille soit libre.

Soient donc x, y, z trois réels tels que :

$$x.v + y.u + z.e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x - y = 0 \\ x = -2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La famille $\mathscr{C}$ est libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$ est obtenue en écrivant les vecteurs de la nouvelle base en fonction de ceux de l'ancienne base :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & e_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Pour calculer l'inverse de P (une matrice de passage est toujours inversible), on résout le système $PX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -x - 2y = b \\ y = c \end{cases} \iff \begin{cases} z = a - x - y = a + b + c \\ x = -2y - b = -b - 2c \\ y = c \end{cases}$$

© Major-Prépa

en procédant par substitutions remontantes. On obtient P^{-1} en réécrivant les lignes du système dans l'ordre, puis sous forme matricielle :

$$PX = Y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

2. a) La matrice A' de f dans la base $\mathscr{C}$ est obtenue en calculant les coordonnées des images des vecteurs u, v, e_1 en fonction de ces derniers ; on utilise notamment à loisir la linéarité de f :

- $f(u) = f(e_1) - f(e_2) = (0, -2, 1) - (-2, 0, 1) = (2, -2, 0) = 2.(e_1 - e_2) = 2u$.
- $f(v) = f(e_1) - 2f(e_2) + f(e_3) = (-1, 2, -1) = -v$
- $v = f(e_1) + e_1$ donc $f(e_1) = v - e_1$

Donc :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(e_1) \end{array} \\ A' = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \\ e_1 \end{array} \end{array}$$

b) Dans la base $\mathscr{C}$, la matrice A' de f est triangulaire ; les valeurs propres de A', qui sont aussi celles de f, sont donc les éléments diagonaux de cette matrice, soit :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 2\}$$

On doit ensuite calculer les dimensions des deux sous-espaces propres : le calcul des vecteurs propres n'est pas obligatoire ici, on peut raisonner avec la notion de rang :

- $A' - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est évidemment de rang 2 car l'une de ses colonnes est nulle, et les deux autres sont non proportionnelles. Ce rang est aussi celui de $f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et d'après le théorème du rang :
$$\dim E_2(f) = \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3 - \mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 1$$
- $A' + I - 3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est également de rang 2, donc selon le même argument :
$$\dim E_{-1}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3 - \mathrm{rg}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 1$$

Ainsi : $\dim E_2(f) + \dim E_{-1}(f) = 1 + 1 = 2 < 3$, dont f n'est pas diagonalisable.

c) L'endomorphisme f est bijectif car 0 n'est pas valeur propre de f.

d) La formule de changement de base donne tout simplement :

$$A' = P^{-1}AP \iff A = PA'P^{-1}$$

3. a) Le calcul des images par g des vecteurs de la base canonique est immédiat :

$$g(e_1) = g(1, 0, 0) = (1, 0, -1), \quad g(e_2) = g(0, 1, 0) = (1, 2, 1), \quad g(e_3) = (-1, 0, 1)$$

et donc :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

© Major-Prépa

b) Les calculs matriciels donnent :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 1+2-1 & -1+0-1 \\ 0+0+0 & 0+4+0 & 0+0+0 \\ -1+0-1 & -1+2+1 & 1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est bien égale à $2B$.

c) La relation : $B^2 = 2B \iff B^2 - 2B = 0_3$ signifie que $P(X) = X^2 - 2X = X(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice B, et donc de l'endomorphisme g qu'elle représente également.

Les racines évidentes de P sont 0 et 2, ce sont les seules valeurs propres possibles de g :

$$\mathrm{Sp}(g) \subset \{0, 2\}$$

On vérifie si les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de g, et le cas échéant on calcule les sous-espaces propres associés :

- $$v = (x,y,z) \in E_0(g) \iff B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$ Le réel 0 est donc bien valeur propre de g, et :

$$E_0(g) = \left\{(x,0,x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\big((1,0,1)\big)$$

On a obtenu une famille génératrice de $E_0(g)$ constituée d'un seul vecteur non nul, c'est donc aussi une famille libre, donc une base de ce sous-espace propre.

- $$v = (x,y,z) \in E_2(g) \iff (B - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 0 & & & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff -x + y - z = 0 \iff x = y - z$$ Le réel 2 est donc bien valeur propre de g, et :

$$E_2(g) = \left\{(y-z, y, z) \,\middle|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\big((1,1,0), (-1,0,1)\big)$$

On a obtenu une famille génératrice de $E_2(g)$ constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc aussi une famille libre, donc une base de ce sous-espace propre.

d) L'endomorphisme g admet deux valeurs propres, et : $\dim E_0(g) + \dim E_2(g) = 1 + 2 = 3$, donc g est bien diagonalisable.

On pose : $$\mathscr{E} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, BM = MA\right\}.$$

4. a) Montrons que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans lequel il est inclus, ce qui en fera un espace vectoriel.

- La matrice nulle 0_3 vérifie : $B \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$, donc $0_3 \in \mathscr{E}$ et $\mathscr{E}$ est non vide.
- Soient $M,\ N$ deux éléments de $\mathscr{E}$, et α un réel quelconque, alors :

$$B(\alpha.M + N) = \alpha.BM + BN \overset{M,N\in\mathscr{E}}{=} \alpha.MA + NA = (\alpha.M + N)A$$

donc $\alpha.M + N \in \mathscr{E}$: $\mathscr{E}$ est stable par combinaison linéaire, c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

© Major-Prépa

b) Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{E}$; supposons que M soit inversible, alors on peut écrire :

$$BM = MA \iff B = MAM^{-1}$$

ce qui signifie que A et B sont semblables : il y a alors plusieurs raisons qu'on peut invoquer pour conclure que c'est impossible :

- la plus évidente : A est inversible comme on l'a vu, donc $B = MAM^{-1}$ devrait l'être également comme produit de matrices inversibles : or ce n'est pas le cas puisque 0 est valeur propre de B !
- A et B semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, ce qui est impossible : B est diagonalisable, tandis que A ne l'est pas !

Une matrice de $\mathscr{E}$ n'est donc jamais inversible.

5. On cherche à montrer que $\mathscr{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0_3\}$.

a) On sait qu'une matrice et sa transposée ont le même rang ; or par linéarité de la transposée, et puisque I_3 est égale à sa transposée en tant que matrice diagonale :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad {}^{\mathrm{t}}(A - \lambda.I_3) = {}^{\mathrm{t}}A - \lambda.\,{}^{\mathrm{t}}I_3 = {}^{\mathrm{t}}A - \lambda.I_3$$

donc $A - \lambda.I_3$ et ${}^{\mathrm{t}}A - \lambda.I_3$ ont même rang.

b) Le résultat précédent signifie en outre qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres, puisque ce sont les réels λ pour lesquels $A - \lambda.I_3$ n'est pas de rang maximal, ce qui est alors aussi le cas de ${}^{\mathrm{t}}A - \lambda.I_3$.

Mais on connaît les valeurs propres de A et B : $\alpha = 2$ est la seule valeur propre commune à A et B, donc commune à ${}^{\mathrm{t}}A$ et B également !

NDLR : sur cette question comme tant d'autres, n'allez pas chercher compliqué, et rappelez-vous toujours : plus c'est simple, plus cela a de chances d'être correct !

c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\alpha = 2$, et Y un vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}A$ associé à la valeur propre $\alpha = 2$. On note : $N = X\,{}^{\mathrm{t}}Y$.

Alors : au vu des formats des matrices manipulées, et en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$:

$$X\,{}^{\mathrm{t}}Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}$$ est une matrice non nulle

puisque X et Y sont non nulles : l'un des x_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) au moins est non nul, et l'un des y_j ($j \in \{1, 2, 3\}$) est non nul, donc l'un des neuf produits x_iy_j au moins est non nul, ce qui suffit à garantir que N est non nulle !

Ensuite : d'après les règles de calcul avec la transposée, et les relations : $BX = 2X$ et ${}^{\mathrm{t}}AY = 2Y$ issues des hypothèses faites,

$$BN = BX\,{}^{\mathrm{t}}Y = 2X\,{}^{\mathrm{t}}Y = 2N \quad \text{et} \quad NA = X\,{}^{\mathrm{t}}YA = X\,{}^{\mathrm{t}}\big({}^{\mathrm{t}}AY\big) = X \times {}^{\mathrm{t}}(2Y) = 2X\,{}^{\mathrm{t}}Y = 2N$$

Donc $BN = NA (= 2N)$, ce qui prouve bien que N appartient au sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$.

d) La question précédente permet de construire une matrice N de $\mathscr{E}$ dès qu'on connaît un vecteur propre X de B pour la valeur propre 2, et un vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}A$ pour la même valeur propre.

On connaît déjà deux vecteurs propres de B non colinéaires pour la valeur propre 2 :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

© Major-Prépa

${}^{t}A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice dont les deux dernières colonnes sont proportionnelles, il est donc très facile de repérer que $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vérifie : $\left({}^{t}A - 2I_3\right)Y = 0_{3,1} \iff {}^{t}AY = 2Y$.

Mais alors, d'après ce qui précède : $N_1 = X_1\,{}^{t}Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2 = X_2\,{}^{t}Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont deux éléments non nuls de $\mathscr{E}$.

Comme N_1 et N_2 sont évidemment non colinéaires, elles forment une famille libre (N_1, N_2) de $\mathscr{E}$; par conséquent, on peut effectivement affirmer que :

$$\dim \mathscr{E} \geqslant 2$$

Commentaires rapides sur cet exercice : un joli énoncé qui fait bien le tour sur les fondamentaux de la réduction des endomorphismes dans le programme de ECE2, sans pièges ni calculs compliqués. La question 5. est la seule qui demande davantage d'initiative, et donc de recul sur les notions, et c'est tout son intérêt dans un sujet de concours pour départager les candidats !.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x)$$

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme différence de fonctions de référence de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$, d'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Calcul des limites :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x - \ln(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

© Major-Prépa

- Au voisinage de $+\infty$: $x-\ln(x)=x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$, où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{\ln(x)}{x}=1-0=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. Sur l'intervalle $]0,1[$ (respectivement sur $]1,+\infty[$), la fonction f est continue (car de class $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante (respectivement strictement croissante), à valeurs dans $]1,+\infty[$ qui contient 2 : d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution a sur $]0,1[$ (respectivement une unique solution b sur $]1,+\infty[$).

L'équation $f(x)=2$ admet donc exactement deux solutions a et b sur son domaine $]0,+\infty[$, telles que : $0<a<1<b$.

3. On calcule les images : $f(2)=2-\ln(2)\approx 1,3$ et $f(4)=4-\ln(4)=4-2\ln(2)\approx 4-1,4=2,6$; comme $f(b)=2$, on peut donc affirmer que :

$$f(2)<f(b)<f(4)\iff 2<b<4$$

par stricte croissance de f sur $]1,+\infty[$, intervalle qui contient 2, b et 4.

On a bien prouvé que $b\in[2,4]$.

PARTIE II : Étude d'une suite

On note : $u_0=4$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\ln(u_n)+2$.

4. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n\in[b,+\infty[$" est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n=0$: $u_0=4$ est défini par l'énoncé, et $b\in[2,4]$ donc $b\leqslant 4\iff u_0=4\in[b,+\infty[$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n\in\mathbb{N}$, et sous cette hypothèse montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a supposé (H.R.) que : $u_n\in[b,+\infty[$ donc $u_n>0$, ce qui assure que $u_{n+1}=\ln(u_n)+2$ est bien définie.

De plus, $b\geqslant 2>1$ donc $u_n\in]1,+\infty[$, intervalle sur lequel ln est strictement croissante, de sorte que :

$$\ln(u_n)\geqslant\ln(b)\iff u_{n+1}=\ln(u_n)+2\geqslant\ln(b)+2$$

Or b est solution de l'équation $f(x)=2$, donc : $b-\ln(b)=2\iff\ln(b)=b-2\iff\ln(b)+2=b$, et donc : $u_{n+1}\geqslant b\iff u_{n+1}\in[b,+\infty[$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

$$\text{Pour tout entier } n\in\mathbb{N},\quad u_n \text{ existe et } u_n\in[b,+\infty[$$

5. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\ln(u_n)+2-u_n=2-f(u_n)$.

Or : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant b>1$ donc par stricte croissance de f sur $]1,+\infty[$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f(u_n)\geqslant f(b)=2\iff\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n=2-f(u_n)\leqslant 0,$$

ce qui assure que la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est aussi minorée par b, elle est donc convergente d'après le théorème de limite monotone, de limite $\ell\geqslant b$.

Comme ln est continue sur $[b,+\infty[$, le principe d'unicité de la limite appliqué à la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\ln(u_n)+2$ permet d'affirmer que ℓ est solution de l'équation :

$$\ell=\ln(\ell)+2\iff\ell-\ln(\ell)=2\iff f(\ell)=2$$

© Major-Prépa

Les deux seules solutions de l'équation sont a et b, et seule la deuxième appartient à $[b, +\infty[$, on peut donc conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = b$$

6. a) L'encadrement demandé est typique de l'utilisation de l'Inégalité des Accroissements Finis :

La fonction $g : x \mapsto \ln(x) + 2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, +\infty[$, avec :

$\forall x \in [2, +\infty[,\ g'(x) = \dfrac{1}{x}$ qui vérifie : $\quad \forall x \in [2, +\infty[,\ 0 \leqslant g'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b \geqslant 2$: l'Inégalité des Accroissements Finis permet donc d'écrire, avec $m = 0$ et $M = \dfrac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant g(u_n) - g(b) \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$$

puisque comme on l'a vu : $\quad g(b) = \ln(b) + 2 = b$ vu que $b - \ln(b) = 2$.

b) On montre alors par récurrence que la propriété $\mathcal{Q}(n)$: "$0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $\quad u_0 - b = 4 - b$, or $2 \leqslant b \leqslant 4 \iff -2 \geqslant -b \geqslant -4 \iff 2 \geqslant 4 - b \geqslant 0$, et puisque $\dfrac{1}{2^{-1}} = 2$, alors $0 \leqslant u_0 - b \leqslant \dfrac{1}{2^{-1}}$ et $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ est encore vraie.

On a supposé (H.R.) que : $\quad 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \iff 0 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$;

or d'après ce qui précède, $0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$, donc par transitivité de l'inégalité :

$$0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad \text{et } \mathcal{Q}(n+1) \text{ est vraie si } \mathcal{Q}(n) \text{ l'est.}$$

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

7. a) La fonction demandée calcule de proche en proche les termes de la suite (u_n) :

```
function u = suite(n)
    u = 4
    for i = 1:n
        u = log(u) + 2
    end
endfunction
```

b) D'après le résultat de **6.**b) : $\quad$ le terme u_n constitue une valeur approchée de sa limite b à la précision $\varepsilon > 0$ près si : $\quad 0 \leqslant u_n - b \leqslant \varepsilon$, ce qui est le cas dès que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$ par transitivité de l'inégalité.

le script suivant incrémente donc la variable `n` d'une unité jusqu'à ce que pour la première fois, $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ `<epsilon` $\iff$ $2^{n-1} >$ `1/epsilon` soit vraie ; il suffit alors de renvoyer le terme u_n correspondant, ce que fait la ligne 6 du script.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while 2^(n-1) < 1/epsilon
```

```
            n = n+1
        end
        b = suite(n)
    endfunction
```

À l'exécution du code avec `epsilon = 1e-6`, on obtient la valeur approchée : $b \approx 3.146193$.

PARTIE III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction définie par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t$$

8. Comme on l'a vu dès le début de la partie I, la fonction f est continue et strictement positive sur son domaine $]0, +\infty[$ puisqu'elle admet pour minimum $1 > 0$: la fonction $k : \ t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est donc bien définie et continue sur $]0, +\infty[$, ce qui suffit pour affirmer que Φ est bien définie sur $]0, +\infty[$, comme intégrale de k entre deux bornes strictement positives. La fonction k admet d'ailleurs, en tant que fonction continue sur $]0, +\infty[$, des primitives sur cet intervalles ; soit K l'une d'entre elles, on peut donc écrire :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{2x} k(t)\mathrm{d}t = \Big[K(t)\Big]_x^{2x} = K(2x) - K(x)$$

En tant que primitive, K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$: il en est donc de même pour la fonction Φ, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme somme de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et d'après la formule de dérivation d'une composée :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi'(x) = 2.K'(2x) - K'(x) = 2k(2x) - k(x) = 2 \times \frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)}$$

$$= \frac{2\big(x - \ln(x)\big) - \big(2x - \ln(2x)\big)}{\big(x - \ln(x)\big)\big(2x - \ln(2x)\big)} = \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2) + \ln(x)}{\big(x - \ln(x)\big)\big(2x - \ln(2x)\big)}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{\big(x - \ln(x)\big)\big(2x - \ln(2x)\big)}$$

9. Sur $]0, +\infty[$, le dénominateur de $\Phi'(x)$ est égal à $f(x) \times f(2x)$ qui est strictement positif sur tout l'intervalle, puisque f l'est. Le signe de $\Phi'(x)$ est donc celui de $\ln(2) - \ln(x)$;
comme $\ln(2) - \ln(x) > 0 \iff \ln(2) > \ln(x) \iff 2 > x$ par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$, on en déduit le tableau de variations de la fonction Φ :

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Φ	‖	$\nearrow$		$\searrow$	

10. La fonction $h : \ t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, de plus on a vu que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) \geqslant 1 \iff \forall t \in]0, +\infty[, \quad 0 < \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$$

© Major Prépa

L'inégalité de la moyenne, appliquée à la fonction continue k entre les bornes x et $2x$ pour $x \in]0,+\infty[$ quelconque, où $x < 2x$ (bornes dans l'ordre croissant), donne :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad 0.(2x-x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \leqslant 1.(2x-x) \iff \forall x \in]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$$

11. a) De l'encadrement précédent on déduit immédiatement, d'après le théorème du même nom :

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} \Phi(x) = 0$$

ce qui prouve que la fonction Φ est prolongeable par continuité en 0, en posant $\Phi(0) = 0$.

b) Comme on l'a vu : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = 2k(2x) - k(x) = \dfrac{2}{f(2x)} - \dfrac{1}{f(x)}$.

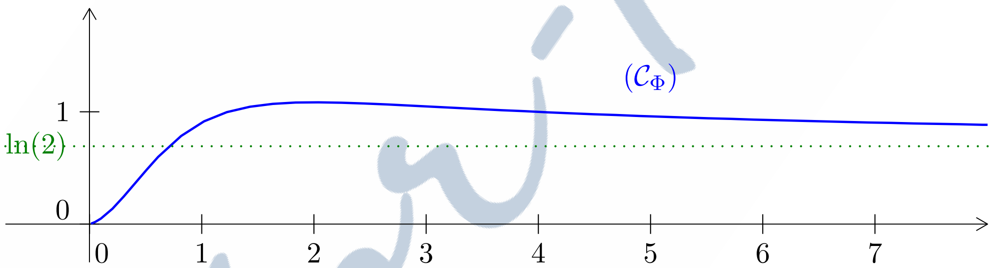
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(2x)}$ (puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$), alors par simples inverses et différence de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi'(x) = 0 - 0 = 0$$

On admet[1] qu'alors, Φ est dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

La courbe de Φ admet donc une tangente horizontale au point d'origine du repère, et une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$ au voisinage de $+\infty$; la fonction Φ admet par ailleurs un maximum au point d'abscisse 2, valant $\Phi(2) \approx 1,1$; muni de ces informations, et en respectant les variations obtenues de Φ, on en déduit le tracé suivant :



PARTIE IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

13. a) Les dérivées partielles de la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, sont définies par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \partial_1(H)(x,y) = x - y - 2 \quad \text{et} \quad \partial_2(H)(x,y) = -x + e^y$$

b) Les points critiques de la fonction H sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1(H)(x,y) &= 0 \\ \partial_2(H)(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + e^y &= 0 \\ x - y - 2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \ln(x) \\ x - \ln(x) = 2 \end{cases}$$

1. le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ qui permettait cette conclusion, n'étant plus au programme officiel de ECE2

© Major-Prépa

Comme on l'a vu, l'équation $x - \ln(x) = 2$ admet exactement deux solutions a et b dans $]0, +\infty[$, ce qui donne deux couples solutions au système, les deux points critiques de la fonction H :

$$\big(a, \ln(a)\big) \quad \text{et} \quad \big(b, \ln(b)\big)$$

Il y a une grosse faille dans cet énoncé : comme $0 < a < 1$, alors $\ln(a) < 0$ et le point $\big(a, \ln(a)\big)$ n'appartient *pas* à l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$, ce qui invalide toute la suite !!
Il aurait fallu prendre $U =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, ouvert avec lequel tout va bien... !

14. a) Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction H sont définies sur U par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \partial^2_{1,1}(H)(x, y) = 1, \quad \partial^2_{2,2}(H)(x, y) = e^y, \quad \partial^2_{1,2}(H)(x, y) = \partial^2_{2,1}(H)(x, y) = -1$$

(les dérivées partielles croisées d'ordre 2 sont égales, d'après le théorème de Schwarz.)

La matrice Hessienne M_a de H au point critique $\big(a, \ln(a)\big)$ est alors :

$$M_a = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(H)\big(a, \ln(a)\big) & \partial^2_{1,2}(H)\big(a, \ln(a)\big) \\ \partial^2_{2,1}(H)\big(a, \ln(a)\big) & \partial^2_{2,2}(H)\big(a, \ln(a)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

b) La matrice M_a est symétrique réelle, donc diagonalisable : on sait donc qu'elle admet deux valeurs propres distinctes ou confondues λ_1 et λ_2, solutions de l'équation :

$$\det\big(M_a - \lambda.I_2\big) = 0 \iff (1 - \lambda)(a - \lambda) - 1 = 0 \iff \lambda^2 - (1 + a)\lambda + a - 1 = 0$$

Le trinôme du second degré obtenu se factorise sous la forme : $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$, donc par identification des coefficients :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = a + 1 \\ \lambda_1\lambda_2 & = a - 1 \end{cases}$$

c) On sait que $0 < a < 1$, donc $\lambda_1\lambda_2 = a - 1 < 0$: le produit des deux valeurs propres de M_a étant négatif, celles-ci sont de signes opposées, ce qui suffit pour conclure que la fonction H n'admet pas d'extrémum au point critique $\big(a, \ln(a)\big)$, mais un point-col.

15. La hessienne de H au point critique $\big(b, \ln(b)\big)$ est, selon les mêmes calculs : $M_b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$; toujours selon le même raisonnement, les deux valeurs propres μ_1 et μ_2 de M_b vérifient :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 & = b + 1 \\ \mu_1\mu_2 & = b - 1 \end{cases}$$

Cette fois, $b \geqslant 2$ donc $b - 1 > 0$, et les deux valeurs propres μ_1 et μ_2 sont donc de même signe puisque leur produit est strictement positif.
Le réel $b + 1 = \mu_1 + \mu_2$, somme de deux réels de même signe, est lui aussi positif : on en déduit que $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.
La fonction H admet donc un extrémum local au point critique $\big(b, \ln(b)\big)$, et c'est un minimum local.

© Major-Prépa

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaire amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

PARTIE I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succesion de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) En notant P_i (resp. F_i) l'événement : « le i-ième lancer donne Pïle (resp. donne Face) » :

- $[X=0]=P_1\cap P_2$, donc par indépendance des lancers : $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(P_2)=\frac{4}{9}$.
- $[X=1]=(P_1\cap F_2\cap P_3)\cup(F_1\cap P_2\cap P_3)$, donc par union disjointe :
  $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(P_1\cap F_2\cap P_3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$
- $[X=2]=(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4)\cup(P_1\cap F_2\cap F_3\cap P_4)$,
  et $\mathbb{P}(X=2)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$.

b) On introduit ici, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n qui compte le nombre de Pile obtenus en n lancers identiques et indépendants : T_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n,\frac{2}{3})$.

Mais alors, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$: l'événement $[X=n]$ est réalisé si et seulement s'il y a eu un seul Pile au cours des $n+1$ premiers lancers, le $n+2$-ième lancer donnant un Pile :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad [X=n]=[T_{n+1}=1]\cap P_{n+2}$$

et par indépendance des lancers :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(T_{n+1}=1)\times\mathbb{P}(P_{n+2})=\binom{n+1}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\times\frac{2}{3}=(n+1).\frac{4}{3^{n+2}}$$

PARTIE II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile : puis en fonction de nombre n de Faces obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V=X-U$.

2. a) Le numéro de la boule tirée est au mieux égal à celui pris par la variable aléatoire X : dans l'absolu, comme X, U peut donc prendre toute valeur entière, c'est-à-dire que : $U(\Omega)=\mathbb{N}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$: la loi conditionnelle de U sachant $[X=n]$ est évidemment la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$, c'est-à-dire que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}_{[X=n]}(U=k)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}$$

© Major-Prépa

c) On en déduit la valeur de $\mathbb{P}(U=k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U=k]\cap[X=n]\big)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\times \mathbb{P}_{[X=n]}(U=k) \quad \text{car } \mathbb{P}_{[X=n]}(U=k)=0 \text{ si } n<k\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}} = 4\sum_{j=k+2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j = 4\times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}}{1-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$P(U=k) = 4\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{k+2}} = \frac{2}{3^{k+1}}$$

d) Le plus efficace ici est de remarquer que la variable aléatore $U+1$ a pour univers-image $\mathbb{N}^*$, et une loi donnée par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(U+1=k) = \mathbb{P}(U=k-1) = \frac{2}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{2}{3}$$

ce qui prouve que $U+1$ suit la loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{2}{3}$.

On en déduit directement, d'après le cours sur la loi géométrique, que :

$$E(U+1) = \frac{3}{2} \quad\text{et}\quad V(U+1) = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\times\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

La linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance permettent d'en déduire :

$$E(U)+1=\frac{3}{2} \iff E(U)=\frac{1}{2} \quad\text{et}\quad V(U)=V(U+1)=\frac{3}{4}$$

3. a) La variable aléatoire V est égale à la différence entre la valeur de X, numéro maximal dans l'urne à la deuxième étape de l'expérience, et le numéro U de la boule tirée ; cette différence peut être maximale lorsque $[X=n]$ et $[U=0]$, auquel cas V prend la valeur n, entier quelconque : on en déduit que $V(\Omega)=\mathbb{N}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$; sachant $[X=n]$, la différence $V=X-U$ est comprise entre 0 et n, donc pour tous entiers n et k :

$$\mathbb{P}_{[X=n]}(V=k) = \mathbb{P}_{[X=n]}(X-U=k) = \mathbb{P}_{[X=n]}(U=n-k) = \begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & \text{si } 0\leqslant n-k\leqslant n \iff 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X=n]$ est la même que celle de U sachant $[X=n]$: les mêmes calculs que ceux de la question 2. permettent d'en déduire que V suit la même loi que U.

4. Pour tous entiers k et j :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([U=k]\cap[V=j]\big) &= \mathbb{P}\big([U=k]\cap[X=k+j]\big) = \mathbb{P}(X=k+j)\times\mathbb{P}_{[X=k+j]}(U=k)\\ &= (k+j+1)\times\frac{4}{3^{k+j+2}}\times\frac{1}{k+j+1} = \frac{4}{3^{k+j+2}}\end{aligned}$$

puisque $k+j$ est toujours supérieur à k.

Comme par ailleurs, $\mathbb{P}(U=k)\times\mathbb{P}(V=j) = \dfrac{2}{3^{k+1}}\times\dfrac{2}{3^{j+1}} = \dfrac{4}{3^{k+j+2}} = \mathbb{P}\big([U=k]\cap[V=j]\big)$,

ce qui prouve bien que U et V sont des variables aléatoires indépendantes.

© Major-Prépa

5. Puisque U et V sont indépendantes : $\operatorname{Cov}(U,V)=0$. Mais alors :

$$\operatorname{Cov}(X,U)=\operatorname{Cov}(U+V,U)=\operatorname{Cov}(U,U)+\operatorname{Cov}(V,U)=V(U)+0=\frac{3}{4}$$

PARTIE III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

6. Simulation informatique

a) On simule les lancers de pièce avec la pièce truquée utilisée par le joueur A, jusqu'à ce que le nombre de Pile obtenus atteigne le nombre 2 pour la prmeière fois :

```
function x = simule_X()
    x = 0; n = 0
    while n < 2
        if rand() < 2/3 then
            n = n+1
        else
            x = x+1
        end
    end
endfunction
```

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0,1[$, simule la variable aléatoire Y et on considère alors le script suivant :

```
function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10^4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
endfunction
```

La fonction `mystere` simule donc $N=10^4$ fois de façon (pseudo-)indépendante, l'expérience aléatoire décrite au début de cette partie, et à chaque fois que $[X\leqslant Y]$ est réalisé, la variable `r` est augmentée de la quantité $\frac{1}{N}$: cela revient au même que d'ajouter 1 à `r` à chaque réalisation de l'événement $[X\leqslant Y]$, puis de diviser sa valeur finale par N.

Bref, la valeur de `r` rendue par la fonction est égale au nombre moyen de réalisations de l'événement $[X\leqslant Y]$ sur un échantillon de 10^4 réalisations de l'expérience, ce qui constitue une approximation de la probabilité $\mathbb{P}(X\leqslant Y)$.

c) La courbe donnée par l'énoncé passe par l'ordonnée $\frac{1}{2}$ lorsque p est aux alentours de 0.83, valeur pour laquelle le jeu est serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) La variable aléatoire Z est égale à $Y+1$, c'est le nombre total de lancers effectués lorsque la deuxième pièce truquée tombe pour la première fois sur Pile : comme on réutilise toujours la

© Major-Prépa

même pièce, l'expérience est sans mémoire et on peut en conclure directement que Z suit la loi géométrique de paramètre p :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = (1-p)^{k-1}.p, \quad E(Z) = \frac{1}{p}, \quad V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$$

b) Comme on l'a dit précédemment, $Y = Z - 1$; les propriétés de l'espérance et de la variance donnent :

$$E((Y) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \quad \text{et} \quad V(Y) = V(Z-1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[Y \geqslant n] = \bigcup_{k=n}^{+\infty} [Y = k]$; l'union est disjointe, donc par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(Y = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(Z = k+1) = p \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k = p \times \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

8. a) La probabilité $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$ se calcule via la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X :

$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n] \cap [X \leqslant Y]\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y \geqslant n]\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y \geqslant n)$$

b) Les probabilités $\mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$, sont connues, on peut terminer le calcul explicite :

$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} (1-p)^n = \frac{4}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{(1-p)^n}{3^n} = \frac{4}{9} \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(\frac{1-p}{3}\right)^{j-1}$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} = \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{2+p}\right)^2 = \frac{4}{(2+p)^2}$$

c) On peut donc trouver la valeur de p telle que :

$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \frac{1}{2} \iff \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \iff 8 = (2+p)^2 \iff p = \sqrt{8} - 2$$

qui est bien environ égale à $0,83$.

★ ★ ★ **FIN DU SUJET** ★ ★ ★

© Major-Prépa