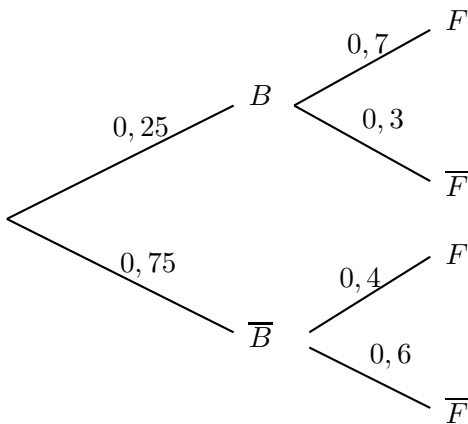


Correction

Exercice 1 Antilles 2005

Appelons B l'événement "le livre est une biographie" et F l'événement "l'auteur est français".
D'après l'énoncé on peut construire l'arbre pondéré suivant :



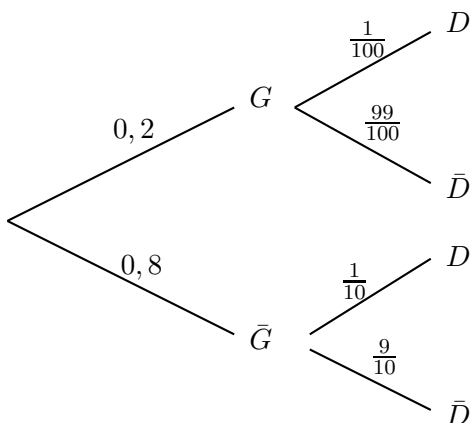
1. Réponse b d'après l'énoncé (c'est le quotient de 150 par 200 livres au total)
2. D'après l'énoncé c'est 0,4 (on demande $p_{\overline{B}}(F)$); réponse c.
3. On demande $p(\overline{B} \cap F) = 0,75 \times 0,4 = 0,3$; réponse c.
4. $p(F) = 0,3 + 0,25 \times 0,7 = 0,475$ réponse c.
- 5.

$$p_F(\overline{B}) = \frac{p(\overline{B} \cap F)}{p(F)} = \frac{0,3}{0,475} = \frac{12}{19}$$

6. Le contraire est tout les romans sont des biographies, comme les choix sont indépendants on reconnait un schéma de Bernoulli avec 20 épreuves identiques et indépendantes et le nombre de romans biographiques suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20, 0.25)$ donc on aura :
 $p = 1 - p(B)p(B)\dots = 1 - p(B)^{20} = 1 - 0,25^{20}$; réponse a.

Exercice 2 Antilles 2002

1. On peut modéliser la situation par l'arbre pondéré suivant :



d'après les propriétés de l'arbre pondéré on sait que :

$$p(A) = 0,2 \times 0,01 = 0,002$$

$$\text{et } p(B) = 0,002 + 0,8 \times 0,1 = 0,082$$

2. On demande la probabilité que la chaudière soit sous garanti sachant qu'elle est défectueuse :

$$p_D(G) = \frac{p(D \cap G)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,082} = \frac{2}{82} = \frac{1}{41}$$

3. La loi de probabilité de X est donnée par :

$$p(X = 80) = p(\overline{G} \cap \overline{D}) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$$

$$p(X = 280) = p(\overline{G} \cap D) = 0,08$$

$$p(X=0) = p(G) = 0,2.$$

L'espérance de X est :

$$E(X) = 80 \times 0,72 + 280 \times 0,08 + 0 = 80$$

4. On sait que les chaudières sont défectueuses et le contraire de au moins l'une d'elle est sous garanti est aucune n'est sous garanti, comme les événements sont indépendants la probabilité qu'aucune ne soit sous garanti est : $\left(\frac{40}{41}\right)^5$ donc la probabilité demandée est : $1 - \left(\frac{40}{41}\right)^5$
5. On reconnaît un schéma de Bernoulli avec 10 épreuves identiques et indépendantes donc le nombre de chaudières défectueuses suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,082 ; donc la probabilité qu'il y ait 2 machines défectueuses est :

$$\binom{10}{2} 0,082^2 (1 - 0,082)^8 = \dots$$

et le nombre moyen de chaudières défectueuses est $np = 10 \times 0,082 = 0,82$.

6. Il faut donc prévoir en moyenne $200 \times 0,82 = 164$ euros.

Exercice 3 Asie 2000

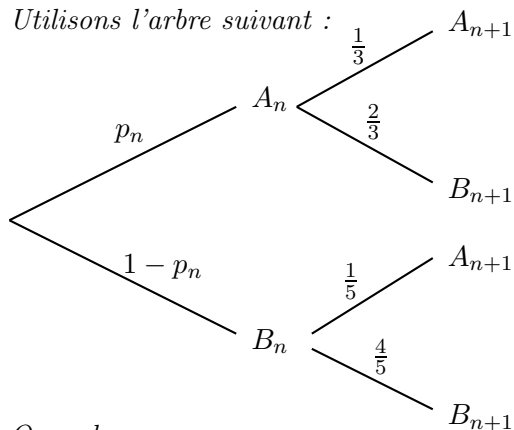
1. $p_1 = 0,5$ d'après l'énoncé.

On a d'après la formule des probabilités totales :

$$p(A_2) = p(A_1)p_{A_1}(A_2) + p(B_1)p_{B_1}(A_2) = 0,5 \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

On peut aussi utiliser un arbre pondéré .

2. Utilisons l'arbre suivant :



On a donc

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5}$$

d'où le résultat.

- 3.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n - \frac{2}{13 \times 5} = \frac{2}{15}\left(p_n - \frac{2}{13 \times 5} \times \frac{15}{2}\right) = \frac{2}{15}\left(p_n - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15}u_n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{15}$, et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$.

4. Comme (u_n) est une suite géométrique, on sait que :

$$u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{7}{26} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} \text{ et } p_n = u_n + \frac{3}{13}$$

5. Comme $-1 < q < 1$ on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{13}$$