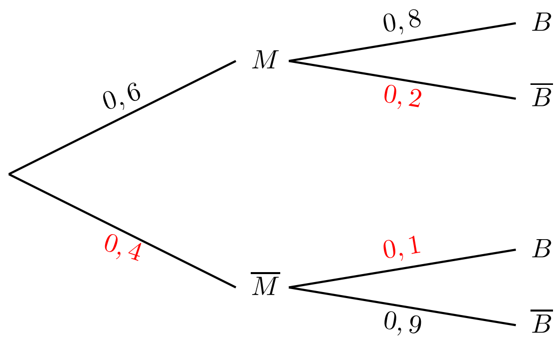
France métropolitaine/Réunion. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) La calculatrice fournit $P(1,04 \leqslant T \leqslant 2,64) = 0,954$ arrondi au millième. On note que la probabilité demandée est $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma)$ et donc que cette probabilité est fournie dans le cours (à 10^{-2} près en général).

b) La calculatrice fournit $P(T \geqslant 1,2) = 0,945$ arrondi au millième.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap M) + P\left(B \cap \overline{M}\right) = P(M) \times P_M(B) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(B) \\ &= 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 = 0,48 + 0,04 = 0,52. \end{aligned}$$

La probabilité que le taux de cholestérol baisse est $0,52$.

c) La probabilité demandée est $P_B(M)$.

$$P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = \frac{12}{13} = 0,923 \text{ arrondi au millième.}$$

3) a) Ici, $n = 100$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,3$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 30 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 70 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}, 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}\right] = [0,210; 0,390]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) La fréquence observée est $f = \frac{37}{100} = 0,37$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse $p = 0,3$ au seuil 95%.

c) Notons n l'effectif de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

$$\begin{aligned} 0,3 \notin \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\Leftrightarrow 0,3 < 0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (car } 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0,3) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,07 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{0,07} \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,07^2} \\ &\Leftrightarrow n > 204,08\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 205 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

L'effectif minimal de l'échantillon est 205.

