

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) a) Soit n un entier naturel. D'après la relation de CHASLES

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^n e^{-x^2} dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx.$$

Pour tout réel x de $[n, n+1]$, $e^{-x^2} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \geq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Soit x un réel. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et donc $0 \leq x^2 - 2x + 1$ puis $-x^2 \leq -2x + 1$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, on a $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx$. Ensuite,

$$\int_0^n e^{-2x+1} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_0^n = \left(-\frac{1}{2} e^{-2n+1} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^{0+1} \right) = \frac{e}{2} - \frac{e^{-2n+1}}{2}.$$

Puisque $\frac{e^{-2n+1}}{2} > 0$, on en déduit que $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx < \frac{e}{2}$ et finalement, $u_n < \frac{e}{2}$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_n < \frac{e}{2}$.

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante d'après a), et majorée (par $\frac{e}{2}$) d'après b). On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2) a) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive sur $[0, 2]$. Donc, u_2 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$. L'aire, exprimée en unités d'aire, de $OABC$ est égale à $OA \times OC$ c'est-à-dire 2. Donc,

$$u_2 = \text{aire de } \mathcal{D} = p \times \text{aire de } OABC = 2p.$$

b) i) La condition de la ligne L8 est vérifiée si et seulement si le point $M(X, Y)$ appartient au domaine $\mathcal{D}$.

b) ii) L'algorithme génère N points aléatoires de coordonnées (X, Y) à l'intérieur du rectangle $OABC$. Le compteur C dénombre parmi ces N points ceux qui sont dans le domaine $\mathcal{D}$. $F = \frac{C}{N}$ est donc la fréquence d'appartenance d'un point au domaine $\mathcal{D}$.

b) iii) Quand N est très grand, la fréquence F obtenue expérimentalement est proche de la probabilité théorique p .

c) La fréquence est $F = \frac{441\,138}{1\,000\,000} = 0,441\,138$. Donc, $0,440\,138 \leq p \leq 0,442\,138$ puis

$$0,880\,276 \leq 2p \leq 0,884\,276$$

et en particulier, $0,88 \leq 2p \leq 0,89$. Puisque $u_2 = 2p$, une valeur approchée par défaut de u_2 à 10^{-2} près est 0,88.

Partie B

1) Soit x un réel de $[0, 2]$. $A(x) = ON \times OP = xe^{-x^2}$.

2) La fonction A est dérivable sur $[0, 2]$ et pour $x \in [0, 2]$,

$$A'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2} = (1 - x\sqrt{2}) (1 + x\sqrt{2}) e^{-x^2}.$$

Pour tout réel x de $[0, 2]$, $(1 + x\sqrt{2}) e^{-x^2} > 0$ et donc $A'(x)$ est du signe de $1 - x\sqrt{2}$. En tenant compte du fait que $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$, on en déduit que la fonction A' est strictement positive sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, strictement négative sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit encore que la fonction A est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$. Finalement, la fonction A admet un maximum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et ce maximum est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Le point M de $\mathcal{C}_f$ pour lequel l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) L'unité d'aire est 1m^2 . L'aire à peindre en bleu est l'aire maximale de $ONMP$ c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. L'aire à peindre en blanc est $u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

La calculatrice fournit $0,428 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,429$ et donc une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,42\text{ m}^2$. D'autre part, $0,880 \leq u_2 \leq 0,885$ et donc

$$0,880 - 0,429 \leq u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,885 - 0,428$$

ou encore $0,451 \leq u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,457$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,45\text{ m}^2$.