Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1, 0, -6)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3, 1, -10)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors, en analysant la deuxième coordonnée de chacun de ces deux vecteurs, on a $1 = 0k$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés. On en déduit que les points A, B et C définissent un plan.

b)

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 6 \times (-1) + 8 \times 0 + (-1) \times (-6) = -6 + 6 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 6 \times (-3) + 8 \times 1 + (-1) \times (-10) = -18 + 8 + 10 = 0.$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Le plan (ABC) est le plan passant par $A(1, 1, 14)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(6, 8, -1)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $6(x - 1) + 8(y - 1) - (z - 14) = 0$ ou encore $6x + 8y - z = 0$.

2) a) Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2, 1, 4)$.

b) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 2 \times 6 + 1 \times 8 + 4 \times (-1) = 16 \neq 0$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$ et on sait alors que la droite Δ et le plan (ABC) sont sécants en un point.

3) Soit $M\left(t^3 + t, t + 1, 2t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (E).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 6\left(t^3 + t\right) + 8(t + 1) - (2t) = 0 \Leftrightarrow 6t^3 + 12t + 8 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 + 6t + 4 = 0.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 3t^3 + 6t + 4$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $f' : t \mapsto 9t^2 + 6$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{t \to -\infty} f(t), \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\right[$, l'équation $f(t) = k$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

Or, $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} 3t^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} 3t^3 = +\infty$. Par suite, $\left]\lim\limits_{t \to -\infty} f(t), \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\right[=]-\infty, +\infty[$. Le réel $k = 0$ appartient à cet intervalle et on a donc montré qu'il existe un réel t et un seul tel que $f(t) = 0$ ou encore il existe un point de (E) et un seul qui appartient au plan (ABC).

