Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Les plans (UVK) et (EFK) se coupent suivant la droite (KM). La droite (UV) est une droite du plan (UVK) et la droite (EF) est une droite du plan (EFK) et les droites (UV) et (EF) sont parallèles. D'après le théorème du toit, la droite (KM) est parallèle à la droite (UV).

Donc, le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$.

b) Les plans (SOA) et (GCB) sont parallèles. Le plan (UKN) coupe ces deux plans en deux droites parallèles. Ces deux droites sont les droites (UK) et (NP) et donc les droites (UK) et (NP) sont parallèles.
Donc, le segment $[UK]$ est parallèle au segment $[NP]$.

2) a) La droite $\overrightarrow{ES}$ est la droite passant par $E(4;0;2,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{ES}(-4;0;1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (ES) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4-4t \\ y = 0 \\ z = 2,5+t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Le point K appartient à la droite (ES) et donc il existe un réel t tel que les coordonnées de K soient $(4-4t;0;2,5+t)$.

$$x_K = 1,2 \Leftrightarrow 4-4t = 1,2 \Leftrightarrow 4t = 2,8 \Leftrightarrow t = 0,7.$$

Pour $t = 0,7$, on obtient les coordonnées du point K : $(1,2;0;3,2)$.

b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UV}$ sont $(0;8;0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UK}$ sont $(1,2;0;-2,8)$.

$$\overrightarrow{UV}.\overrightarrow{n} = 0\times 7 + 8\times 0 + 0\times 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{UK}.\overrightarrow{n} = 1,2\times 7 + 0\times 0 + (-2,8)\times 3 = 8,4-8,4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UK}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (UVK). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (UVK).

Le plan (UVK) est le plan passant par $U(0;0;6)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(7;0;3)$. Une équation cartésienne du plan (UVK) est donc $7(x-0)+0(y-0)+3(z-6)=0$ ou encore $7x+3z-18=0$.

c) La droite (FG) est la droite passant par $F(4;5;2,5)$ et de vecteur directeur $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{GF}(1;0;0)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (FG) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = 5 \\ z = 2,5 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Soit $Q(4+t;5;2,5)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (FG).

$$Q \in (UVK) \Leftrightarrow 7(4+t)+3\times 2,5-18 = 0 \Leftrightarrow 7t+17,5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{17,5}{7} \Leftrightarrow t = -2,5.$$

Quand $t = -2,5$, on obtient les coordonnées du point N : $(1,5;5;2,5)$.

d) On place le point K de (ES) d'abscisse $1,2$ et le point N de (FG) d'abscisse $1,5$. On trace la parallèle à la droite (UV) passant par K. Elle coupe la droite (SF) en M. On peut alors tracer les segments $[KM]$ et $[MN]$. Enfin, la parallèle à la droite (UK) passant par N coupe la droite (BC) en P. On peut alors tracer le segment $[NP]$.

3) Soit H le projeté orthogonal de G sur la droite (OS). H le point de coordonnées $(0;0;2,5)$. L'angle du segment $[SG]$ avec l'horizontale est l'angle $\widehat{HGS}$. On sait que

$$\tan\left(\widehat{HGS}\right) = \frac{HS}{HG} = \frac{1}{5}.$$

On en déduit que $\widehat{HGS} = 11,3^\circ$ arrondi à 10^{-1}. La condition est donc remplie.

