

Partie A

1) Soit $x \in [-2, 2]$, $f(-x) = -\frac{b}{8}(e^{-\frac{x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}) + \frac{9}{4} = -\frac{b}{8}(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}) + \frac{9}{4} = f(x)$.

On en déduit que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de f .

2) f est dérivable sur $[-2, 2]$ et pour tout réel x de $[-2, 2]$,

$$f'(x) = -\frac{b}{8} \left(\left(\frac{1}{b} \right) e^{\frac{x}{b}} + \left(-\frac{1}{b} \right) e^{-\frac{x}{b}} \right) + 0 = -\frac{1}{8} (e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}).$$

3) Soit $x \in [-2, 2]$. Si $x > 0$, alors $-\frac{x}{b} < 0 < \frac{x}{b}$ puis $e^{-\frac{x}{b}} < e^{\frac{x}{b}}$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) puis $e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} > 0$ et donc $f'(x) < 0$.

De même, si $x < 0$, alors $\frac{x}{b} < 0 < -\frac{x}{b}$ puis $f'(x) > 0$. Enfin, $f'(0) = 0$.

D'autre part, $f(0) = -\frac{b}{8}(e^0 + e^0) + \frac{9}{4} = -\frac{2b}{8} + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{b}{4}$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-2	0	2
$f'(x)$	+	0	-
f	$f(-2) \nearrow \frac{9}{4} - \frac{b}{4} \searrow f(2)$		

La fonction f admet un maximum en 0 égal à $\frac{9}{4} - \frac{b}{4}$ ou encore le point S a pour coordonnées $\left(0, \frac{9}{4} - \frac{b}{4}\right)$

Partie B

1) $y_S = 2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - \frac{b}{4} = 2 \Leftrightarrow \frac{b}{4} = \frac{9}{4} - 2 \Leftrightarrow \frac{b}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = 1$. Donc, pour tout réel x de $[-2, 2]$, $f(x) = -\frac{1}{8}(e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4}$.

2) $f(2) = -\frac{1}{8}(e^2 + e^{-2}) + \frac{9}{4} = 1,309\dots$ La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, 2]$. On en déduit que pour tout réel k de $[f(2), f(0)] = [1,309\dots; 2]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 2]$. Puisque 1,5 est dans l'intervalle $[1,309\dots; 2]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 2]$. Cette solution est a .

La calculatrice fournit $f(1,76) = 1,501\dots$ et donc $f(1,76) > 1,5$ et $f(1,77) = 1,494\dots$ et donc $f(1,77) < 1,5$. Ainsi, $f(1,76) > f(a) > f(1,77)$ et donc, puisque f est strictement décroissante sur $[0, 2]$, $1,76 < a < 1,77$.

Une valeur approchée de a à 10^{-2} près par défaut est 1,76.

3) L'unité d'aire est égale à 1 m^2 . Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0; 1,8]$, l'aire $\mathcal{A}$ d'un vantail, exprimée en m^2 , est $\int_0^{1,8} f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{1,8} \left(-\frac{1}{8}(e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4} \right) dx = \left[-\frac{1}{8}(e^x - e^{-x}) + \frac{9}{4}x \right]_0^{1,8} \\ &= \left(-\frac{1}{8}(e^{1,8} - e^{-1,8}) + \frac{9 \times 1,8}{4} \right) - \left(-\frac{1}{8}(e^0 - e^0) + 0 \right) \\ &= 4,05 - 0,125(e^{1,8} - e^{-1,8}). \end{aligned}$$

La masse exprimée en kg d'un vantail est donc $m = 20 \int_0^{1,8} f(x) dx = 81 - 2,5(e^{1,8} - e^{-1,8}) = 66,2\dots$ La masse d'un vantail dépasse 60 kg et donc le client décide d'automatiser son portail.

Partie C

L'aire, exprimée en m^2 , du rectangle $OCES$ est $2 \times 1,8 = 3,6$.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$.
 $f(1) = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}(e + e^{-1})$ et $f'(1) = -\frac{1}{8}(e - e^{-1})$.

Quand $x = 0$, on obtient

$$OG = y_G = f(1) - f'(1) = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}(e + e^{-1}) + \frac{1}{8}(e - e^{-1}) = \frac{9}{4} - \frac{2e^{-1}}{8} = \frac{9 - e^{-1}}{4}.$$

Quand $x = 1,8$, on obtient

$$\begin{aligned} CH = y_H = f(1) + 0,8f'(1) &= \frac{9}{4} - \frac{1}{8}(e + e^{-1}) - \frac{0,8}{8}(e - e^{-1}) = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}(e + e^{-1} + 0,8e - 0,8e^{-1}) \\ &= \frac{9}{4} - \frac{1}{8}(1,8e + 0,2e^{-1}) = \frac{9}{4} - \frac{2}{8}(0,9e + 0,1e^{-1}) = \frac{9 - 0,9e - 0,1e^{-1}}{4}. \end{aligned}$$

L'aire, exprimée en m^2 , du trapèze $OCHG$ est

$$\frac{OG + CH}{2} \times OC = \frac{1,8}{2} \left(\frac{9 - e^{-1}}{4} + \frac{9 - 0,9e - 0,1e^{-1}}{4} \right) = \frac{1,8(18 - 0,9e - 1,1e^{-1})}{8} = 3,408 \dots$$

La forme 2 est effectivement plus avantageuse. L'économie réalisée en termes de surface de bois, exprimée en m^2 , est de $3,6 - 3,408 \dots = 0,191 \dots$ soit environ $0,2 m^2$ pour un vantail.