Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

Le plan $\mathscr{P}$ n'est parallèle à aucune des faces du cube car un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ qui n'est orthogonal à aucun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{AE}$.

1 ère solution. (on obtient les coordonnées exactes des différents sommets de la section)

• **Intersection de $\mathscr{P}$ avec (AB).** Les points de (AB) sont les points de coordonnées $(\lambda, 0, 0)$. Un tel point appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\lambda = 1$. Donc, $\mathscr{P} \cap (AB) = \{B\}$.

• **Intersection de $\mathscr{P}$ avec (EF).** Le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. La droite (EF) admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $M(\lambda, 0, 1)$ un point de (EF). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$. Donc $\mathscr{P} \cap (EF) = \{I\}$ où $I\left(\frac{2}{3}, 0, 1\right)$.

Mais alors, la section de la face $ABFE$ par le plan $\mathscr{P}$ est le segment $[BI]$.

• **Intersection de $\mathscr{P}$ avec (GH).** Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{GH}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 0)$. La droite (GH) admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $M(1 - \lambda, 1, 1)$ un point de (GH). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (1 - \lambda)\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{6}$. Donc $\mathscr{P} \cap (GH) = \{J\}$ où $J\left(\frac{1}{6}, 1, 1\right)$.

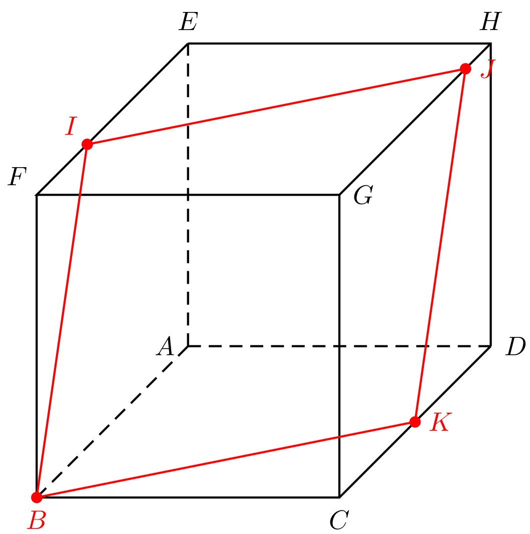
La section de la face $EFGH$ par le plan $\mathscr{P}$ est le segment $[IJ]$.

• **Intersection de $\mathscr{P}$ avec (CD).** Le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. La droite (DC) admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $M(\lambda, 1, 0)$ un point de (GH). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Donc $\mathscr{P} \cap (DC) = \{K\}$ où $K\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

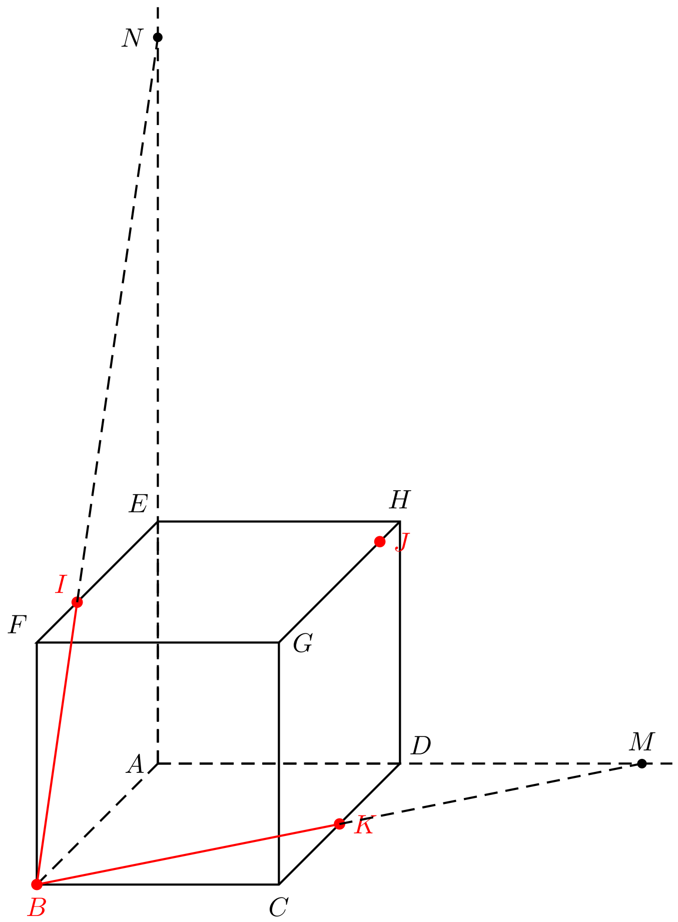
La section de la face $GHCD$ par le plan $\mathscr{P}$ est le segment $[JK]$ puis la section de la face $ABCD$ par le plan $\mathscr{P}$ est le segment $[KB]$.

On peut alors tracer la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.



2 ème solution. (On se contente de construire les sommets de la section en cherchant d'abord les intersections avec les axes qui sont bien plus simples à déterminer. C'est très certainement cette solution qui était attendue.)

Soit $M(x, y, z)$ un point du plan $\mathscr{P}$. Si $x = y = 0$, alors $z = 3$, si $x = z = 0$, alors $y = 2$ et si $y = z = 0$, alors $x = 1$. Les points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les droites (AB), (AD) et (AE) sont les points B, M et N de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 3)$. En traçant les droites (MB) et (NB), on obtient la trace $[BK]$ du plan $\mathscr{P}$ sur la face $ABCD$ et la trace $[BI]$ du plan $\mathscr{P}$ sur la face $ABFE$.



La trace $[KJ]$ du plan $\mathscr{P}$ sur la face $CDGH$ est alors obtenue en traçant la parallèle à (BI) passant par K et enfin la trace du plan $\mathscr{P}$ sur la face $EFGH$ est le segment $[IJ]$.