

Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A - Cas général

1) La fonction v est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif t ,

$$v'(t) = 9,81 \times \frac{m}{k} \times \left(- \left(-\frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right) = 9,81 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Pour tout réel positif t , on a $v'(t) > 0$ et donc la fonction v est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2) La vitesse croît ou encore la goutte d'eau accélère dans sa chute. Elle ne ralentit pas.

3) Puisque $\frac{k}{m} > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k} (1 - 0) = 9,81 \frac{m}{k}$.

4) Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} v(t) \geq 0,99 \times 9,81 \frac{m}{k} &\Leftrightarrow 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \geq 0,99 \times 9,81 \frac{m}{k} \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \geq 0,99 \\ &\Leftrightarrow 0,01 \geq e^{-\frac{k}{m}t} \Leftrightarrow e^{-\frac{k}{m}t} \leq \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \ln \left(e^{-\frac{k}{m}t} \right) \leq \ln \left(\frac{1}{100} \right) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow -\frac{k}{m}t \leq -\ln(100) \Leftrightarrow t \geq \frac{m \ln(100)}{k}. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de l'instant $t_0 = \frac{m \ln(100)}{k}$, la vitesse de la goutte d'eau dépasse 99% de sa vitesse limite. Or, $\ln(100) = 4,6 \dots$ et donc $5 \geq \ln(100)$ puis $\frac{5m}{k} \geq \frac{m \ln(100)}{k}$. L'affirmation du scientifique est donc correcte.

Partie B

1) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} v(t) = 15 &\Leftrightarrow 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) = 15 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{15k}{9,81m} \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{k}{m}t} = 1 - \frac{15k}{9,81m} \Leftrightarrow -\frac{k}{m}t = \ln \left(1 - \frac{15k}{9,81m} \right) \Leftrightarrow t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{15k}{9,81m} \right), \end{aligned}$$

avec

$$1 - \frac{15k}{9,81m} = 1 - \frac{15 \times 3,9}{9,81 \times 6} = 1 - \frac{15 \times 390}{981 \times 6} = 1 - \frac{5 \times 65}{327} = \frac{2}{327}$$

et donc $v(t) = 15$ si et seulement si $t = -\frac{6}{3,9} \ln \left(\frac{2}{327} \right)$ ou encore $t = \frac{6}{3,9} \ln \left(\frac{327}{2} \right)$.

La calculatrice fournit $\frac{6}{3,9} \ln \left(\frac{327}{2} \right) = 7,8$ secondes arrondi au dixième de seconde.

2) La vitesse moyenne v_{moy} sur l'intervalle de temps allant de 0 à $\frac{6}{3,9} \ln \left(\frac{327}{2} \right)$ est la valeur moyenne de la vitesse instantanée sur l'intervalle $\left[0, \frac{6}{3,9} \ln \left(\frac{327}{2} \right) \right]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{m}{k} \ln\left(\frac{327}{2}\right)} v(t) dt &= 9,81 \frac{m}{k} \int_0^{\frac{m}{k} \ln\left(\frac{327}{2}\right)} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) dt = 9,81 \frac{m}{k} \left(\int_0^{\frac{m}{k} \ln\left(\frac{327}{2}\right)} 1 dt - \int_0^{\frac{m}{k} \ln\left(\frac{327}{2}\right)} e^{-\frac{k}{m}t} dt \right) \\
&= 9,81 \frac{m}{k} \left(\frac{m}{k} \ln\left(\frac{327}{2}\right) - \left[-\frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right]_0^{\frac{m}{k} \ln\left(\frac{327}{2}\right)} \right) \\
&= 9,81 \frac{m}{k} \left(\frac{m}{k} \ln\left(\frac{327}{2}\right) - \left(\left(-\frac{m}{k} e^{-\ln\left(\frac{327}{2}\right)} \right) - \left(-\frac{m}{k} e^0 \right) \right) \right) \\
&= 9,81 \frac{m}{k} \left(\frac{m}{k} \ln\left(\frac{327}{2}\right) + \frac{m}{k} e^{-\ln\left(\frac{327}{2}\right)} - \frac{m}{k} \right) = 9,81 \frac{m^2}{k^2} \left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) + \frac{2}{327} - 1 \right) \\
&= 9,81 \frac{m^2}{k^2} \left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327} \right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
v_{moy} &= \frac{1}{\frac{6}{3,9} \ln\left(\frac{327}{2}\right)} \int_0^{\frac{6}{3,9} \ln\left(\frac{327}{2}\right)} v(t) dt = \frac{1}{\frac{6}{3,9} \ln\left(\frac{327}{2}\right)} \times 9,81 \frac{6^2}{3,9^2} \left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327} \right) \\
&= \frac{6 \times 9,81}{3,9 \ln\left(\frac{327}{2}\right)} \left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327} \right) \\
&= 12,1 \text{ m.s}^{-1} \text{ arrondi au dixième de m.s}^{-1}.
\end{aligned}$$