

Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Soit $k \in]0, +\infty[$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'_k(x) = 1 - ke^{-x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'_k(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - ke^{-x} > 0 \Leftrightarrow -ke^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{-1}{-k} \text{ (car } -k < 0) \\ &\Leftrightarrow e^{-x} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \ln(e^{-x}) < \ln\left(\frac{1}{k}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow -x < -\ln(k) \Leftrightarrow x > \ln(k). \end{aligned}$$

De même, $f'_k(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(k)$ et $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(k)$. Ainsi, la fonction f'_k est strictement négative sur $] -\infty, \ln(k)[$ et strictement positive sur $] \ln(k), +\infty[$. On en déduit que la fonction f_k est strictement décroissante sur $] -\infty, \ln(k)[$ et strictement croissante sur $] \ln(k), +\infty[$.

La fonction f_k admet un minimum en le réel $\ln(k)$. Puisque

$$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)} = \ln(k) + \frac{k}{e^{\ln(k)}} = \ln(k) + \frac{k}{k} = \ln(k) + 1,$$

le point A_k a pour coordonnées $(\ln(k), \ln(k) + 1)$. Mais alors, tous les points A_k , $k > 0$, appartiennent à la droite Δ d'équation $y = x + 1$.

On a montré que les points A_k , $k > 0$, sont alignés.