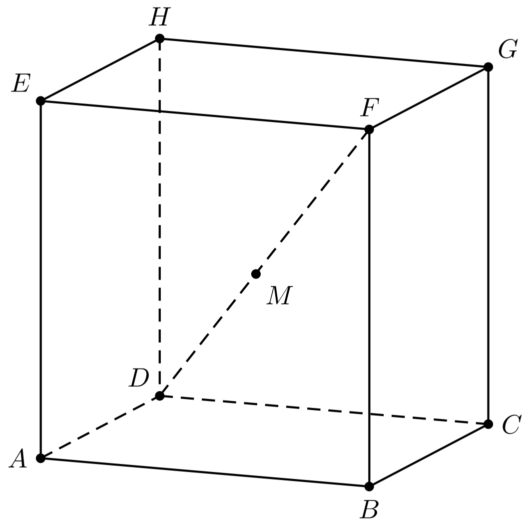
Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\ ;\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DH}\right)$.



Partie A

1) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

3) En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

Partie B

A tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$.
On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1) Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2) a) Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.

b) Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3) On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}.$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

a) le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b) l'angle θ est-il maximal ?

