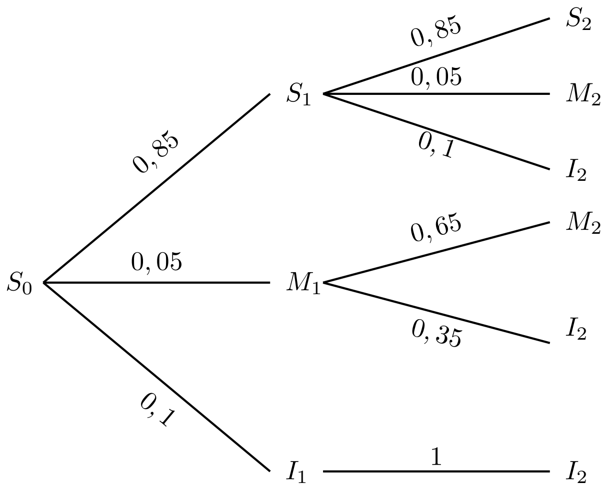
France métropolitaine 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Arbre complété.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(I_2) &= P(S_1) \times P_{S_1}(I_2) + P(M_1) \times P_{M_1}(I_2) + P(I_1) \times P_{I_1}(I_2) \\ &= 0,85 \times 0,1 + 0,05 \times 0,35 + 0,1 \times 1 = 0,2025.\end{aligned}$$

3) La probabilité demandée est $P_{I_2}(M_1)$.

$$P_{I_2}(M_1) = \frac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \frac{P(M_1) \times P_{M_1}(I_2)}{P(I_2)} = \frac{0,05 \times 0,35}{0,2025} = 0,086 \text{ arrondie au millième.}$$

Partie B

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. (S_n, M_n, I_n) est un système complet d'événements et donc $u_n + v_n + w_n = 1$.

2) a) Dans la case C3, on a écrit =0,65*C2+0,05*B2.

b) La valeur du pic épidémique est 4 correspondant à une probabilité maximum d'être malade égale à $0,0859$.

3) a) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}u_{n+1} = P(S_{n+1}) &= P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) + P(M_n) \times P_{M_n}(S_{n+1}) + P(I_n) \times P_{I_n}(S_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,85 + v_n \times 0 + w_n \times 0 = 0,85u_n.\end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = P(S_0) = 1$ et de raison $q = 0,85$. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 0,85^n$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

- $\frac{1}{4}\left(0,85^0 - 0,65^0\right) = \frac{1}{4}(1-1) = 0 = v_0$ et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$. Alors

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= 0,65v_n + 0,05u_n \\ &= \frac{0,65}{4}(0,85^n - 0,65^n) + 0,05 \times 0,85^n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{4}(0,65(0,85^n - 0,65^n) + 0,2 \times 0,85^n) = \frac{1}{4}\left(0,65 \times 0,85^n - 0,65^{n+1} + 0,2 \times 0,85^n\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(0,85 \times 0,85^n - 0,65^{n+1}\right) = \frac{1}{4}\left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right).\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$.

4) Puisque $-1 < 0,65 < 1$ et $-1 < 0,85 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,65^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 - u_n - v_n) = 1$.

Ainsi, à long terme, la population dans son ensemble sera immunisée contre le virus.

