France métropolitaine 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (7 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1) Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3) L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

a) Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x).$$

b) Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$.

c) Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Ces deux courbes sont tracées en annexe page 9. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1) Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N le point de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

a) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

b) Placer sur le graphique fourni en annexe **page 9** les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

2) Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

a) Hachurer le domaine D_λ. correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe **page 9**.

b) On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}.$$

c) Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	
	Saisir S
	λ prend la valeur 0
Traitement :	
	Tant Que $1 - \dfrac{\lambda+1}{e^\lambda} < S$ faire
	$\quad$ λ prend la valeur $\lambda + 1$
	Fin Tant Que
Sortie :	
	Afficher λ

a) Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?

b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Annexe à remettre avec la copie

Exercice 1