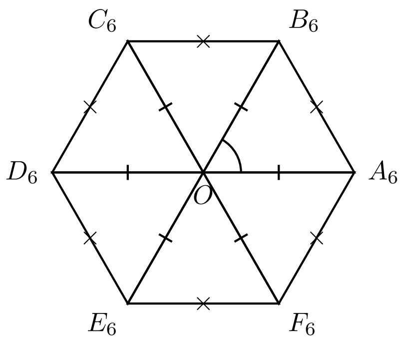
Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$



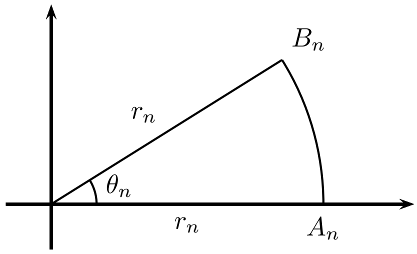
On a représenté ci-contre un polygone P_6.

1) Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\dfrac{1}{6}$.

2) Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

3) En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$



Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1) Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B$_n$ dans le triangle OA$_n$B$_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2) On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}\right)$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi}f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

1) Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

2) En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3) On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	$\quad$ n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

