Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

1) Puisque $OA_6 = OB_6 = r_6$, OA_6B_6 est un triangle isocèle en O. Puisque les 6 triangles sont superposables, l'angle au sommet est $\widehat{A_6OB_6} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Puisque le triangle OA_6B_6 est un triangle isocèle en O, $\widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6}$ et donc

$$\pi = \widehat{A_6OB_6} + \widehat{OA_6B_6} + \widehat{OB_6A_6} = \frac{\pi}{3} + 2\widehat{OA_6B_6}$$

et donc $\widehat{OA_6B_6} = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Finalement, $\widehat{A_6OB_6} = \widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6} = \dfrac{\pi}{3}$ et donc le triangle OA_6B_6 est équilatéral.

Son aire est le sixième de l'aire du polygone P_6 et est donc égale à $\dfrac{1}{6}$.

2) On note H_6 le projeté orthogonal du point B_6 sur la droite (OA_6). Dans le triangle OH_6B_6, rectangle en H_6, on a $\dfrac{H_6B_6}{OB_6} = \sin\left(\widehat{H_6OB_6}\right)$ et donc

$$H_6B_6 = OB_6 \times \sin\left(\widehat{H_6OB_6}\right) = r_6 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r_6\sqrt{3}}{2}.$$

3) L'aire $\mathscr{A}_6$ du triangle OA_6B_6 est

$$\mathscr{A}_6 = \frac{OA_6 \times H_6B_6}{2} = \frac{r_6 \times \dfrac{r_6\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r_6^2\sqrt{3}}{4}.$$

Par suite,

$$\mathscr{A}_6 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{r_6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow r_6^2 = \frac{4}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow r_6^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

On a montré que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

1) On note H_n le projeté orthogonal du point B_n sur la droite (OA_n). Dans le triangle OH_nB_n, rectangle en H_n, on a $\dfrac{H_nB_n}{OB_n} = \sin\left(\widehat{H_nOB_n}\right)$ et donc

$$H_nB_n = OB_n \times \sin\left(\widehat{H_nOB_n}\right) = r_n \sin(\theta_n).$$

L'aire $\mathscr{A}_n$ du triangle OA_nB_n est

$$\mathscr{A}_n = \frac{OA_n \times H_nB_n}{2} = \frac{r_n \times r_n \sin(\theta_n)}{2} = \frac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}.$$

2) Puisque les n triangles sont superposables, l'aire $\mathscr{A}_n$ du polygone P_n est égale à $\dfrac{1}{n}$ et l'angle θ_n est égal à $\dfrac{2\pi}{n}$. Ensuite,

$$\mathscr{A}_n = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{r_n^2 \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}{2} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow r_n^2 = \frac{2}{n \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}.$$

Enfin, $\theta_n \in]0, \pi[$ et donc $\sin(\theta_n) > 0$ puis

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

1) Soit $n \geqslant 4$. Alors, $0 < n < n+1$ et donc $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4}$. On en déduit que $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} \leqslant \dfrac{2\pi}{4} < \pi$. Puisque la fonction f est décroissante ur $]0,\pi[$, on en déduit que $f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ puis que $\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < \dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ et finalement $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$.

Finalement, pour tout $n \geqslant 4$, $r_{n+1} < r_n$ et donc la suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ est strictement décroissante.

2) La suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ converge vers un certain réel positif ou nul L.

3) L'algorithme affiche la première valeur de n à partir de laquelle on a $r_n \leqslant 0,58$.

