Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{l} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{array}\right. , \ t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1) Vérifier que le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite d_1.

2) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$, et passant par le point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

