Asie 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (3 points) (commun à tous les candidats)

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.

2) Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : estimation de la valeur J

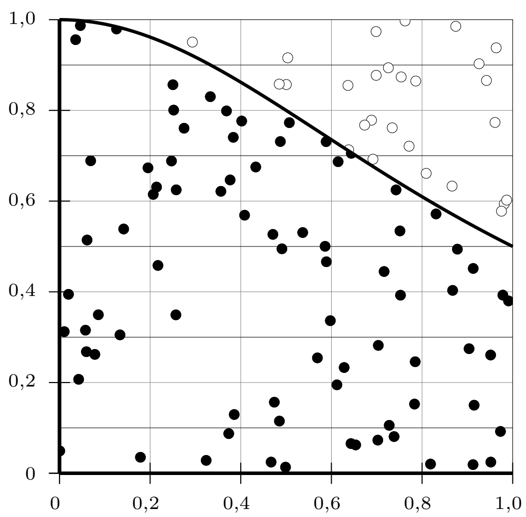
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a donc : $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.
Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.
On choisit au hasard un point $M(x\,;\,y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ est égale à l'intégrale J.
En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$;
- si $M(x\,;\,y)$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \dfrac{c}{n}$ est une valeur approchée de J. *C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.*

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.

Illustration de la méthode avec $n = 100$



1) Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de n
	c prend la valeur ...
	Pour i allant de 1 à ... faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend ...
	    Si ... alors
	        ... prend la valeur ...
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur ...

Sortie	Afficher f

2) Pour $n = 1\ 000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0,781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J.

3) Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à $0,02$?

