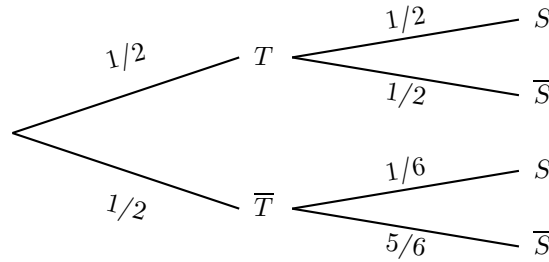


EXERCICE 3 : corrigé

1) On note T l'événement « on choisit le dé truqué » et S l'événement « on obtient le six ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P_S(T)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P_S(T) = \frac{P(T) \times P_T(S)}{P(T) \times P_T(S) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(S)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}.$$

La probabilité que le dé soit truqué est égale à $\frac{3}{4}$. La proposition 1 est fausse.

2) $x_M = \operatorname{Re}(z_M) = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$. $z_N = \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i-2i-1}{2^2+1^2} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$ et donc $x_N = \operatorname{Re}(z_N) = 1$.

Les points M et N ont la même abscisse et donc la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées. L'affirmation 2 est vraie.

3) Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\vec{u}(1, 0, 2)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2, -1, -1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(6, 0, -3)$.

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 0 \times (-1) + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0,$$

et

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 6 + 0 \times 0 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc, la droite d est orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC) . On en déduit que la droite d est orthogonale au plan (ABC) . L'affirmation 3 est vraie.

4) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et encore les droites d et Δ ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites d et Δ sont sécantes ou non coplanaires.

La droite Δ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2u \\ y = 4 + u \\ z = 1 + 3u \end{cases}$. Soient alors $M(1+t, 2, 3+2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d et $N(1+2u, 4+u, 1+3u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de Δ .

$$M = N \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t = 1+2u \\ 2 = 4+u \\ 3+2t = 1+3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ t = 2u \\ 3+4u = 1+3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ t = -4 \end{cases}$$

Les droites d et Δ ont donc un point commun. En particulier, les droites d et Δ sont coplanaires et la proposition 4 est fausse.