

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Or, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$$

et de même, $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$ et $1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. La fonction f' est strictement positive sur $]0, e[$, strictement négative sur $]e, +\infty[$ et s'annule en e . Donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissantes sur $[e, +\infty[$.

2) La fonction f admet un maximum en e et ce maximum est

$$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}.$$

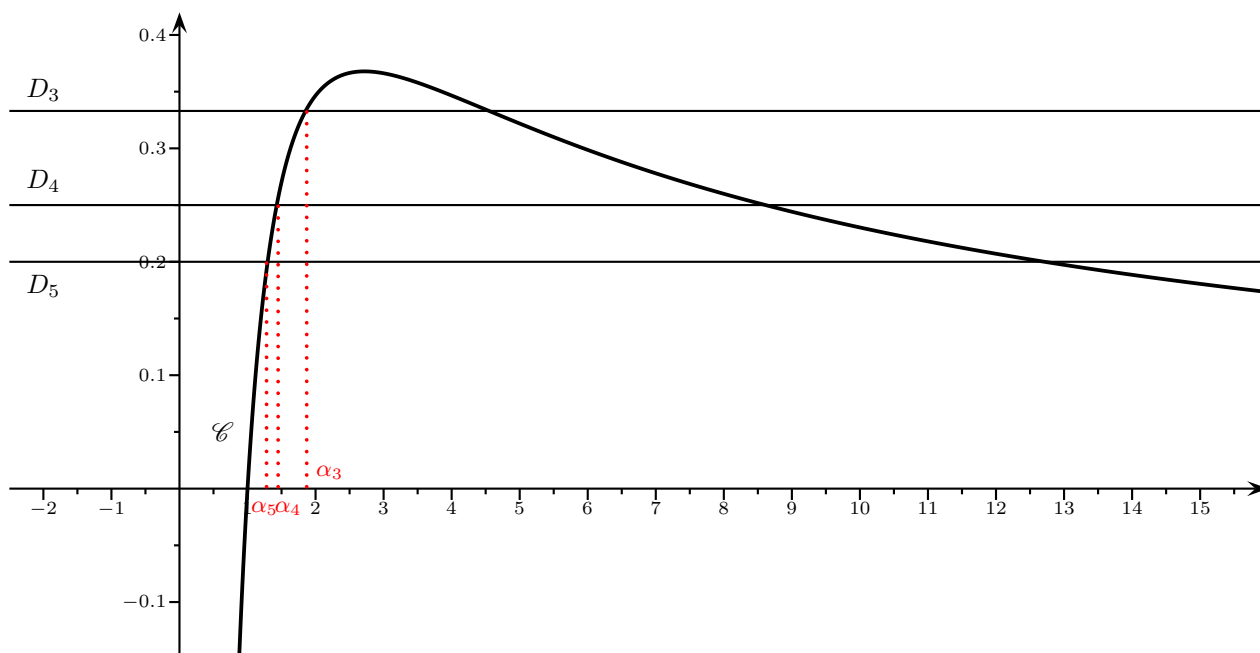
Partie B

1) Soit $n \geq 3$. Donc, $n > e$ puis $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, e]$. Donc, pour tout réel k de $[f(1), f(e)] = \left[0, \frac{1}{e}\right]$, il existe un réel x et un seul de $[1, e]$ tel que $f(x) = k$. En particulier, il existe un réel α_n de $[1, e]$ et un seul tel que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.

Ceci montre que l'équation (E_n) admet une solution et une seule, notée α_n , dans $[1, e]$.

2) a) α_n est la plus petite des deux abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = \frac{1}{n}$. Sur le graphique, il semble que α_n aille en diminuant quand n augmente ou encore il semble que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ soit décroissante.



b) Soit $n \geq 3$. Par définition, $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Donc, $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$ (et $1 \leq \alpha_n \leq e$ et $1 \leq \alpha_{n+1} \leq e$). Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[1, e]$, on en déduit que $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

Ainsi, pour tout $n \geq 3$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ et donc la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante.

c) La suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et est minorée par 1. Donc, la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ converge.

3) a) Par définition, pour tout $n \geq 3$, $\frac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \frac{1}{n}$ ou encore $\ln(\beta_n) = \frac{\beta_n}{n}$. En particulier, $\ln(\beta_3) = \frac{\beta_3}{3}$. Puisque la suite $(\beta_n)_{n \geq 3}$ est croissante, on en déduit que pour $n \geq 3$, $\beta_n \geq \beta_3$ puis, par stricte croissance de la fonction $\ln$, sur $]0, +\infty[$, $\ln(\beta_n) \geq \ln(\beta_3)$ et donc $\frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_3}{3}$.

Finalement, $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$.

b) Puisque $\frac{\beta_3}{3} > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\beta_3}{3} = +\infty$. Puisque pour tout $n \geq 3$, $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.