Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

Partie A : un premier modèle

1) Soit n un entier naturel. $v_{n+1} = v_n + \dfrac{5}{100}v_n = 1,05v_n$.

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1,05$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 12 \times (1,05)^n.$$

2) Puisque $1,05 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 12 \times (1,05)^n = +\infty$. La population dépassera donc strictement les 60 000 individus à partir d'une certaine année. Le modèle ne répond pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

1) a) La fonction g est dérivable sur $[0;60]$ et pour $x \in [0;60]$, $g'(x) = -\dfrac{2,2}{605}x + 1,1$. Ensuite

$$x \leqslant 60 \Rightarrow -\frac{2,2}{605}x + 1,1 \geqslant -\frac{2,2}{605}60 + 1,1 \Rightarrow g'(x) \geqslant 0,88\ldots \Rightarrow g'(x) \geqslant 0.$$

Donc, la fonction g est croissante sur $[0;60]$.

b) Soit x un réel.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x \Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1,1}{605}x + 0,1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,1 \times 605}{1,1} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{605}{11} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 55. \end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = x$ sont 0 et 55. On note de plus que les deux nombres précédents appartiennent à l'intervalle $[0;60]$.

2) a) $u_1 = -\dfrac{1,1}{605} \times 12^2 + 1,1 \times 12 = 12,938$ arrondi à 10^{-3}. En 2017, la population est de 12 938 individus.

b) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

- $u_0 = 12$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 55$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$. Alors, puisque u_n et 55 appartiennent à $[0;60]$ et que la fonction g est croissante sur $[0;60]$, on en déduit que $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$ et donc que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$ (puisque $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$ d'après la question 1)b)).

On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 55$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = u_n\left(-\frac{1,1}{605}u_n + 0,1\right) = \frac{1,1}{605}u_n\left(-u_n + 0,1 \times \frac{605}{1,1}\right) = \frac{1,1}{605}u_n(55 - u_n).$$

Puisque $u_n \in [0;55]$, cette dernière expression est positive. On a montré que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 55). Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

e) Puisque $g(\ell) = \ell$, on a nécessairement $\ell = 0$ ou $\ell = 55$. D'autre part, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc $\ell \geqslant u_0$ ou encore $\ell \geqslant 12$. Finalement, $\ell = 55$. A long terme, la population se stabilisera à environ 55 000 individus.

3) Algorithme complété.

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.

Variables	n un entier naturel u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant Que** $u < 50$ $\quad$ u prend la valeur $-\dfrac{1,1}{605} \times u^2 + 1,1 \times u$ $\quad$ n prend la valeur $n + 1$ **Fin Tant Que**
Sortie	Afficher n

On note que la valeur de n quand l'algorithme s'arrête, est 1 de plus que la dernière valeur de p pour laquelle $u_p < 50$ ou encore n est la première valeur de p pour laquelle $u_p \geqslant 50$. n est donc l'entier r et on doit afficher n (et pas $n + 1$ ou $n - 1$).

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.