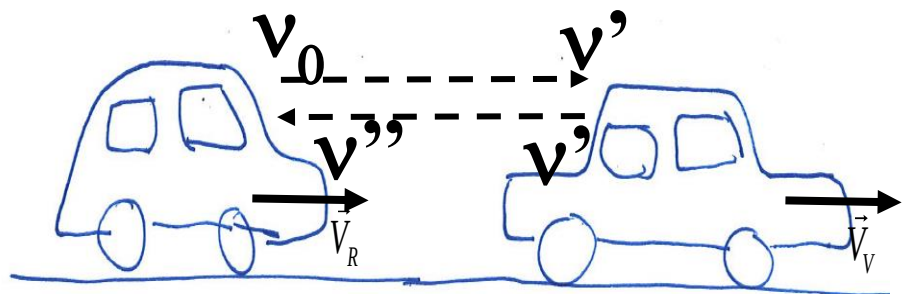


+

Examen de Physique des ondes

I Effet Doppler

Un nouveau radar de contrôle de la vitesse des véhicules est mis en œuvre depuis quelques mois. Ce système est basé sur le dispositif suivant : Un véhicule équipé du radar suit la voiture dont on souhaite mesurer la vitesse. Le radar émet une onde électromagnétique de fréquence ν_0 qui est reçue par la voiture à une fréquence ν' . Cette dernière réémet la fréquence ν' qui est reçue par le radar à la fréquence ν'' . On notera $\vec{C}$ la célérité de l'onde dans l'air, $\vec{V}_R$ la vitesse de déplacement du radar et $\vec{V}_V$ celle de la voiture. On supposera dans la suite du problème que les deux véhicules se déplacent dans la même direction.



- 1) Exprimer la relation Doppler entre ν_0 et ν' en explicitant les vitesses de la source, du récepteur et en justifiant les angles y intervenant.

$$\nu' = \nu_0 \frac{\left(1 - \frac{\vec{V}_R \cdot \vec{C}}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{V}_S \cdot \vec{C}}{c^2}\right)} = \nu_0 \frac{\left(1 - \frac{V_R \cdot \cos(\theta_R, C)}{c}\right)}{\left(1 - \frac{V_S \cdot \cos(\theta_S, C)}{c}\right)}$$

Ici on a :

$$\left. \begin{array}{l} v_R = V_V \\ v_S = V_R \\ \cos(V_V, c) = \cos(V_R, c) = 1 \end{array} \right\} v' = v_0 \frac{\left(1 - \frac{V_V}{c}\right)}{\left(1 - \frac{V_R}{c}\right)}$$

2) Exprimer la relation Doppler entre v' et v'' en explicitant les vitesses de la source, du récepteur et en justifiant les angles γ intervenant.

$$v'' = v' \frac{\left(1 - \frac{v_R \cdot \cos(V_R, c)}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v_S \cdot \cos(V_S, c)}{c}\right)}$$

Ici on a :

$$\left. \begin{array}{l} v_R = V_R \\ v_S = V_V \\ \cos(V_V, c) = \cos(V_R, c) = -1 \end{array} \right\} v'' = v' \frac{\left(1 + \frac{V_R}{c}\right)}{\left(1 + \frac{V_V}{c}\right)}$$

3) En déduire la relation entre v'' et v_0

$$v'' = v' \frac{\left(1 + \frac{V_R}{c}\right)}{\left(1 - \frac{V_V}{c}\right)} = v_0 \frac{\left(1 - \frac{V_V}{c}\right)}{\left(1 - \frac{V_R}{c}\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{V_R}{c}\right)}{\left(1 + \frac{V_V}{c}\right)}$$

4) En déduire une relation approchée au premier ordre entre v'' et v_0 sachant que l'on a :

$$\vec{V}_V \ll \vec{C} \text{ et } \vec{V}_R \ll \vec{C}$$

$$v'' = v_0 \frac{\left(1 - \frac{V_V}{c}\right)}{\left(1 - \frac{V_R}{c}\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{V_R}{c}\right)}{\left(1 + \frac{V_V}{c}\right)} = v_0 \left(1 - \frac{V_V}{c}\right) \cdot \left(1 - \frac{V_R}{c}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{V_R}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{V_V}{c}\right)^{-1}$$

$$v'' \approx v_0 \left(1 - \frac{V_V}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{V_R}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{V_R}{c}\right) \cdot \left(1 - \frac{V_V}{c}\right) = v_0 \left(1 - \frac{V_V}{c}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{V_R}{c}\right)^2$$

$$v'' \approx v_0 \left(1 - 2\frac{V_V}{c}\right) \cdot \left(1 + 2\frac{V_R}{c}\right)$$

5) En déduire le décalage en fréquence $\Delta v = v'' - v_0$ (on négligera les termes du second ordre en $\frac{V_i \cdot V_j}{C^2}$)

$$\Delta v = v'' - v_0 = v_0 \left(1 - \left(1 - 2\frac{V_V}{c}\right) \cdot \left(1 + 2\frac{V_R}{c}\right)\right) = v_0 \left(\left(1 + 2\frac{V_R}{c} - 2\frac{V_V}{c} - 4\frac{V_V \cdot V_R}{c^2}\right) - 1\right)$$

$$\Delta v \approx v_0 \left(2\frac{V_R}{c} - 2\frac{V_V}{c}\right) = v_0 \frac{2(V_R - V_V)}{c}$$

6) $v_0 = 25 \cdot 10^9 \text{ Hz}$, $\Delta v = 1 \text{ kHz}$, $|\vec{V}_R| = 120 \text{ km/h}$, $|\vec{C}| = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, calculer $|\vec{V}_V|$ et indiquer si le radar s'éloigne ou se rapproche de la voiture.

$$\left. \begin{aligned} C &= 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \\ V_R &= 120 \text{ km/h} = \frac{12 \cdot 10^4}{36 \cdot 10^2} \approx 33 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta v = v_0 \frac{2(V_R - V_V)}{c} \Rightarrow (V_R - V_V) = \frac{\Delta v}{v_0} \frac{c}{2} = \frac{10^3 \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 25 \cdot 10^9} = \frac{30}{5} = 6 \text{ m.s}^{-1}$$

$$6 \text{ m.s}^{-1} = \frac{6 \cdot 3600}{1000} \approx 21,5 \text{ km/h} \Rightarrow V_V = 120 - 21,5 \approx 100 \text{ km/h}$$

Le radar se rapproche de la voiture

II) Combinaison d'ondes

Calculer l'équation de $\xi_t(x, t)$, onde résultante de la superposition des trois ondes.

$$\xi_1(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \xi_2(x, t) = \frac{\xi_0}{2} e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \xi_3(x, t) = \frac{\xi_0}{2} e^{i(\omega t - kx - \pi)}$$

III)

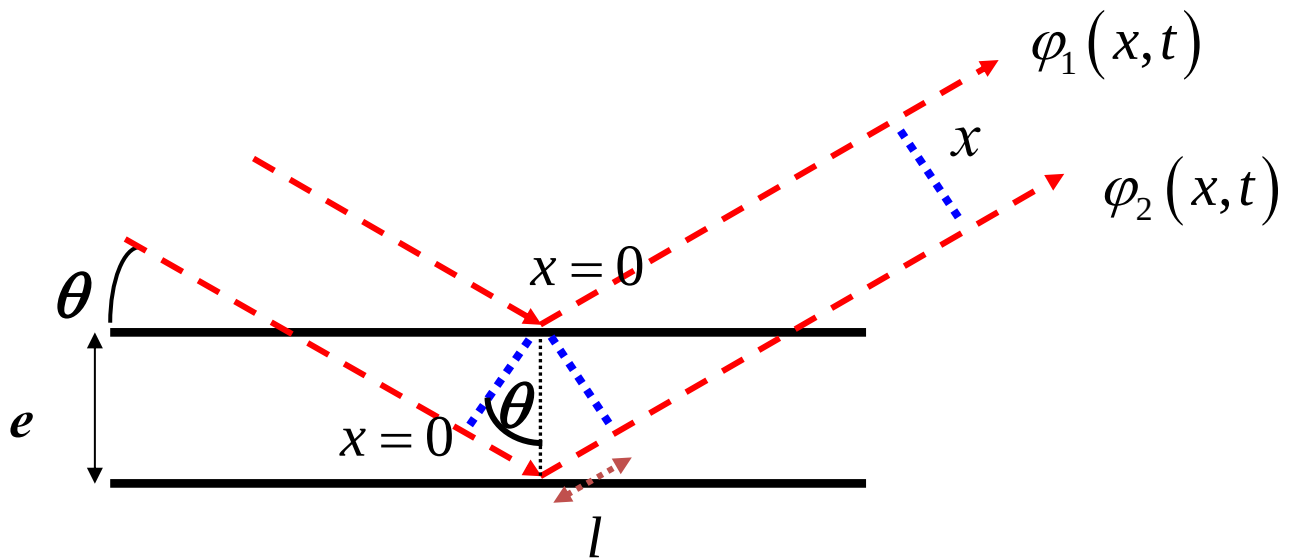
soit la méthode géométrique, soit celle de Fresnel . On rappelle les relations :

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{\rho^2} = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{\left(\operatorname{Re}(e^{i\theta})\right)^2 + \left(\operatorname{Im}(e^{i\theta})\right)^2} \\ \tan(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(e^{i\theta})}{\operatorname{Re}(e^{i\theta})} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \xi_2(x, t) = \frac{\xi_0}{2} e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \xi_3(x, t) = \frac{\xi_0}{2} e^{i(\omega t - kx - \pi)} \\ \xi(x, t) &= \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) + \xi_3(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(1 + \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} e^{-i\pi} \right) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \\ |\xi(x, t)|^2 &= \left(\xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \right) \left(\xi_0 e^{-i(\omega t - kx)} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \right) = \xi_0^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \xi_0^2 \\ |\xi(x, t)|^2 &= \frac{1}{2} \xi_0^2 \Rightarrow \xi_t = \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_0 \\ \frac{\operatorname{Im}(\xi(x, t))}{\operatorname{Re}(\xi(x, t))} &= \tan(\phi) \Rightarrow \tan(\phi) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \text{ rad (ou } 45^\circ) \end{aligned}$$

III) Interférences

On considère un rayon lumineux qui est intercepté par une flaque d'huile d'épaisseur e avec un angle d'incidence θ . Une partie de l'intensité lumineuse est réfléchiée de façon spéculaire par la première interface (air/huile), l'autre partie est transmise à travers la flaque puis réfléchiée à la seconde interface (huile/sol) avec le même angle (voir schéma ci-dessous). On négligera dans toute la suite du problème la variation angulaire liée à la réfraction. On note $\varphi_1(x, t)$ l'onde réfléchiée par la première interface et $\varphi_2(x, t)$ celle réfléchiée par la seconde. La coordonnée x représente la distance à l'origine le long du trajet de l'onde. On fixe son origine au point de réflexion sur la première interface pour $\varphi_1(x, t)$ et donc à l'intersection avec le plan perpendiculaire à l'onde pour $\varphi_2(x, t)$. Les deux ondes sont donc en phase au point $x = 0$.



- 1) Calculer $\delta (= 2.l)$ la différence de marche géométrique entre les deux ondes en fonction de e et θ .

$$l = e \cdot \sin(\theta)$$

$$\delta = 2.l = 2.e \cdot \sin(\theta)$$

- 2) On néglige dans un premier temps la variation d'indice entre l'air et l'huile. Exprimer l'équation décrivant la propagation de chaque onde en fonction x, t, δ et φ_0 l'amplitude qui est identique pour $\varphi_1(x, t)$ et $\varphi_2(x, t)$.

$$\varphi_1(x, t) = \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\varphi_2(x, t) = \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - k(x + \delta))}$$

- 3) On considère maintenant la variation d'indice entre l'air d'indice $n_0 = 1$ et l'huile d'indice n . On néglige le changement d'angle de la direction de propagation dans le milieu « huile » (changement d'angle résultant de la loi de la réfraction). On rappelle que $n = \frac{c}{v}$ où c est la vitesse de propagation de l'onde dans le vide et v celle dans le milieu d'indice n . montrer que la différence de temps que met une onde à parcourir une distance d dans le vide (ou l'air) et la même distance d dans un milieu d'indice n s'exprime comme $\Delta t = (n - 1) \frac{d}{c}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{dans le vide : } t = \frac{d}{c} \\ \text{dans le milieu d'indice } n : t' = \frac{d}{v} = \frac{n.d}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta t = t' - t = (n-1) \frac{d}{c}$$

4) En déduire le déphasage temporel $\Delta(n, \delta, k)$, nouveau déphasage entre $\varphi_1(x, t)$ et $\varphi_2(x, t)$.

le déphasage temporel s'écrit

$$\Delta = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot (n-1) \frac{d}{c} = (n-1) \cdot k \cdot d$$

Il reste à calculer d , la longueur du trajet dans l'huile : $d = \frac{2e}{\sin(\theta)} \Rightarrow \Delta = (n-1) \cdot k \cdot \frac{2e}{\sin(\theta)}$

5) Réécrire l'équation de $\varphi_2(x, t)$ et en déduire l'expression de $\varphi(x, t) = \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t)$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x, t) = \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \\ \varphi_2(x, t) = \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx + \phi)} \\ \text{avec } \phi = \delta + \Delta = 2 \cdot k \cdot e \left(\sin(\theta) + \frac{(n-1)}{\sin(\theta)} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x, t) = \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t) = \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)} + \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx + \phi)}$$

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)} (1 + e^{i\phi})$$

6) Calculer l'intensité réfléchie $I(n, \delta) = |\varphi(x, t)|^2 = \varphi(x, t) \cdot \varphi^*(x, t)$ et expliquer pourquoi elle varie en fonction de la longueur d'onde. Calculer la plus grande longueur d'onde d'intensité maximale $\lambda_{\max}(e, n)$ pour un angle θ fixé.

$$I(n, \phi) = \left| \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)} (1 + e^{i\phi}) \right|^2 = \varphi_0^2 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \cdot e^{-i(\omega t - kx)} \cdot (1 + e^{i\phi}) \cdot (1 + e^{-i\phi})$$

$$I(n, \phi) = \varphi_0^2 \cdot (1 + e^{i\phi}) \cdot (1 + e^{-i\phi}) = \varphi_0^2 \cdot (1 + e^{i\phi} + e^{-i\phi} + 1)$$

$$I(n, \phi) = \varphi_0^2 \cdot (2 + 2 \cdot \cos(\phi))$$

Varie avec λ car $\phi(k)$ dépend de $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$

$$\lambda_{\max} \Rightarrow \cos(\phi) = 1 \Rightarrow 2 \cdot k \cdot e \left(\sin(\theta) + \frac{(n-1)}{\sin(\theta)} \right) = 2 \cdot p \cdot \pi$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_p} \cdot e \left(\sin(\theta) + \frac{(n-1)}{\sin(\theta)} \right) = 2 \cdot p \cdot \pi \Rightarrow \lambda_p = \frac{2}{p} e \left(\sin(\theta) + \frac{(n-1)}{\sin(\theta)} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} = 2 \cdot e \left(\sin(\theta) + \frac{(n-1)}{\sin(\theta)} \right)$$

7) Application numérique : $n=1,5$ $\theta=30^\circ$ $\lambda_{\max} = 500 \text{ nm}$ (vert), calculer l'épaisseur de la flaque :

$$\lambda_{\max} = 2 \cdot e \left(\sin(\theta) + \frac{(n-1)}{\sin(\theta)} \right) \Rightarrow e = \frac{\lambda_{\max}}{2 \cdot \left(\sin(\theta) + \frac{(n-1)}{\sin(\theta)} \right)} = \frac{0,5}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{0,5}{0,5} \right)} = \frac{0,5}{3} \approx 0,167 \text{ mm}$$