

Bac S - Washington Session 2016

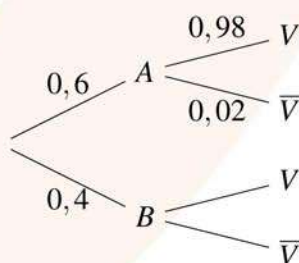
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Corrigé

Exercice 1

Partie A :

1. On peut représenter la situation par un arbre pondéré :



On cherche $P(A \cap V)$ or

$$P(A \cap V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588.$$

Donc la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A est de 0,588.

2. On sait que

$$P(V) = 0,96.$$

Or,

$$P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V),$$

donc

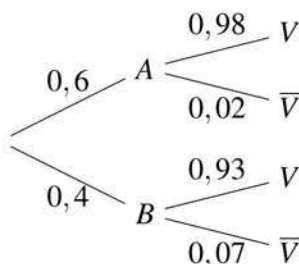
$$\begin{aligned} P(B \cap V) &= P(V) - P(A \cap V) \\ &= 0,96 - 0,588 \\ &= 0,372 \end{aligned}$$

Donc

$$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0,372}{0,4} = 0,93.$$

Donc la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B est de 0,93.

On peut donc compléter l'arbre :



3. On cherche la probabilité qu'une bille provienne de la machine B sachant qu'elle est non vendable :

$$P_{\bar{V}}(B) = \frac{P(\bar{V} \cap B)}{P(\bar{V})} = \frac{0,07 \times 0,4}{1 - 0,96} = 0,7.$$

Donc la probabilité qu'une bille provienne de la machine B et soit non vendable est de 70%. Donc le technicien a raison.

Partie B :

1. Les billes sont vendables lorsque X appartient à $[0,9; 1,1]$ donc, en utilisant la calculatrice :

$$P(0,9 \leq X \leq 1,1) = P(X \leq 1,1) - P(X \leq 0,9) \approx 0,93.$$

Donc la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A au centième près.

2.

$$P(0,9 \leq Y \leq 1,1) = 0,98 \Leftrightarrow P(0,9 - 1 \leq Y - 1 \leq 1,1 - 1) = 0,98$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-0,1}{\sigma'} \leq \frac{Y-1}{\sigma'} \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98$$

$$\Leftrightarrow 2P\left(\frac{Y-1}{\sigma'} \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) - 1 = 0,98$$

$$\Leftrightarrow 2P\left(\frac{Y-1}{\sigma'} \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 1,98$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{Y-1}{\sigma'} \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,99$$

Or $\frac{Y-1}{\sigma'}$ suit une loi normale $N(0;1)$ donc on peut utiliser la calculatrice et cela nous donne :

$$\frac{0,1}{\sigma'} \approx 2,326.$$

Donc

$$\sigma' \approx \frac{0,1}{2,326} \approx 0,043.$$

Partie C :

1. (a) On note B la variable aléatoire qui compte le nombre de billes noires dans un sachet. B suit une loi binomiale car la quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière. La probabilité qu'une bille ait été prise au hasard est de $\frac{1}{5} = 0,2$. Donc B suit une loi binomiale $B(40; 0,2)$. Donc

$$P(X = 10) = \binom{40}{10} 0,2^{10} \times (1 - 0,2)^{40-10} \approx 0,107 \text{ d'après la calculatrice.}$$

Donc la probabilité que le sachet contienne exactement 10 billes noires est d'environ 0,107.

- (b) B suit une loi binomiale, donc grâce à la calculatrice, on trouve a et b les plus petit entiers tels que $P(B \leq a) > 0,025$ et $P(B \leq b) \geq 0,975$ afin de calculer l'intervalle de fluctuation vu en première. On trouve $a = 3$ et $b = 13$ donc l'intervalle de fluctuation au seuil de confiance de 95% des échantillons de taille 40 est :

$$I = \left[\frac{3}{40}; \frac{13}{40} \right].$$

Or $\frac{12}{40} \in I$ donc cela ne permet pas de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.
On peut également utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique vu en terminale.

2. On cherche le nombre de billes n à mettre dans les sachets. Donc maintenant B suit une loi binomiale $B(n; 0, 2)$.

$$\begin{aligned}
 P(B \geq 1) &\geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(B < 1) \geq 0,99 \\
 &\Leftrightarrow 1 - P(B = 0) \geq 0,99 \\
 &\Leftrightarrow 1 - 0,99 \geq P(B = 0) \\
 &\Leftrightarrow 0,01 \geq \binom{n}{0} 0,2^0 \times 0,8^{n-0} \\
 &\Leftrightarrow 0,01 \geq 0,8^n \\
 &\Leftrightarrow \ln(0,01) \geq \ln(0,8^n) \text{ par croissance de } \ln \\
 &\Leftrightarrow \ln(0,01) \geq n \ln(0,8) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \leq n \text{ car } \ln(0,8) < 0
 \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6.$$

Donc il faut mettre minimum 21 billes dans chaque sachet pour que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99%.

Exercice 2

Partie A :

1.

$$f(2e) = 2e \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2.$$

Donc $B(2e; 2) \in \mathcal{C}_f$. Et

$$f(2) = 2 \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0.$$

Donc $I(2; 0) \in \mathcal{C}_f$.

On sait que f est dérivable sur $[2; 2e]$. Et pour tout $x \in [2; 2e]$:

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{\frac{x}{2}} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Donc

$$f'(2) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = \ln(1) = 0.$$

Donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe en I est nul. Donc la tangente à la courbe en I est parallèle à l'axe des abscisses, de plus I appartient à cet axe, donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe au point I .

2. (a) L'équation de la droite $\mathcal{T}$ est :

$$\begin{aligned}
 y &= f'(2e)(x - 2e) + f(2e) \\
 y &= \ln\left(\frac{2e}{2}\right)(x - 2e) + 2 \\
 y &= \ln(e)(x - 2e) + 2 \\
 y &= (x - 2e) + 2
 \end{aligned}$$

D est le point d'intersection de $\mathcal{T}$ et de l'axe des abscisses. On cherche donc à résoudre

$$\begin{aligned}
 0 &= (x - 2e) + 2 \\
 -2 &= (x - 2e) \\
 -2 + 2e &= x
 \end{aligned}$$

(b) Calculons l'aire du triangle ABI :

$$AI = 2$$

et

$$AB = (2e - 2).$$

Donc

$$\mathcal{A}_{ABI} = \frac{2 \times (2e - 2)}{2} = 2e - 2.$$

D'autre part si on projette orthogonalement D sur $[AB]$ en un point M :

$$DI = 2e - 2 - 2 = 2e - 4 = AM$$

$$MB = AB - AM = 2e - 2 - (2e - 4) = 2e - 2 - 2e + 4 = 2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AIDB} &= \mathcal{A}_{AIDM} + \mathcal{A}_{DMB} \\ &= 2 \times (2e - 4) + \frac{2 \times 2}{2} \\ &= 4e - 8 + 2 \\ &= 4e - 6 \end{aligned}$$

Donc on peut en déduire que :

$$5 \times (2e - 2) \leq V \leq 5 \times (4e - 6)$$

$$10e - 10 \leq V \leq 20e - 30.$$

3. (a) Soit $x \in [2; 2e]$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2 \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{\frac{x}{2}} - 2 \frac{x}{4} \\ &= x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \\ &= x \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc G est une primitive de g sur $[2; 2e]$.

(b)

$$\forall x \in [2; 2e], f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

Donc une primitive de f sur l'intervalle $[2; 2e]$ est :

$$F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x.$$

(c) Donc

$$\begin{aligned} S &= 2 \times (2e - 2) - \int_2^{2e} f(x) dx \\ &= 4e - 4 - \left[G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^{2e} \\ &= 4e - 4 - \left(\frac{4e^2}{2} \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - \frac{4e^2}{4} - \frac{4e^2}{2} + 4e - \frac{4}{2} \ln(1) - \frac{4}{4} - \frac{4}{2} + 4 \right) \\ &= 4e - 4 - (2e^2 \ln(e) - e^2 - 2e^2 + 4e - 2 - 1 - 2 + 4) \\ &= 4e - 4 - (2e^2 - 3e^2 + 4e - 1) \\ &= 4e - 4 - (-e^2 + 4e - 1) \\ &= 4e - 4 + e^2 - 4e + 1 \\ &= e^2 - 3 \end{aligned}$$

Donc le volume de la cuve est :

$$V = 5S = 5(e^2 - 3) \approx 22m^3.$$

Partie B :

1. D'après la calculatrice, la solution x_0 de $f(x) = 1$ est comprise entre 4,311 et 4,312. Or V est la fonction volume en fonction de la hauteur d'eau, donc V est une fonction croissante, donc

$$V(4,311) \leq V(1) \leq V(4,3312)$$

donc d'après la calculatrice, $V(1) \approx 7m^3$, au m^3 près.

2. Cet algorithme affiche la hauteur d'eau dans la cuve lorsque que la cuve est à moitié remplie.

Exercice 3 1.

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

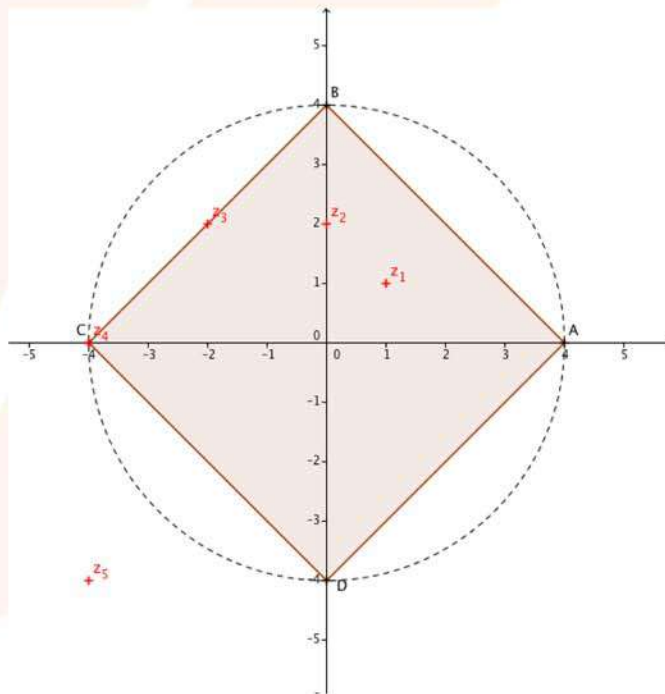
Soit $\theta = \arg(1+i)$ alors

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc $\theta = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2. On dessine les points d'affixe M_n pour $1 \leq n \leq 5$ pour se représenter la situation.



Tout d'abord, remarquons que si M_n n'est pas dans le cercle de centre O de rayon 4 alors a fortiori il n'est pas dans le carré ABCD car le carré est inscrit dans ce cercle.

Etudions la suite (l_n) telle que $l_n = |z_n|$ pour tout entier naturel non nul.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors M_n n'appartient pas au cercle de centre O de rayon 4 si et seulement si $l_n > 4$. Or,

$$\begin{aligned} l_n > 4 &\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n > 4 \\ &\Leftrightarrow \ln((\sqrt{2})^n) > \ln(4) \\ &\Leftrightarrow n \ln(\sqrt{2}) > \ln(4) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(4)}{\ln(\sqrt{2})} \\ &\Leftrightarrow n > 4 \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 5$, $l_n > 4$ et donc M_n est en dehors du cercle de centre O de rayon 4. Donc M_n est en dehors du carré $ABCD$ pour tout n supérieur ou égal à 5.

Exercice 4 1. Les diagonales d'un carré se coupant perpendiculairement, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ sont orthogonaux. Ils sont de même longueur car les diagonales d'un carré sont de même longueur et se coupent en leur milieu. De plus OS est la hauteur de la pyramide donc $\vec{OS}$ est normal au plan ABC , donc $\vec{OS}$ est orthogonal à $\vec{OC}$ et $\vec{OB}$. Donc le repère est orthogonal.

Calculons la longueur OS . Le triangle OSB est rectangle en O il nous manque la longueur BS or $BS = BA$ car ABS est un triangle équilatéral. Or le triangle AOB est rectangle en O donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 1 + 1 = 2$$

donc

$$AB = \sqrt{2}.$$

Donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} BS^2 = SO^2 + OB^2 &\Leftrightarrow SO^2 = BS^2 - OB^2 \\ &\Leftrightarrow SO^2 = (\sqrt{2})^2 - 1^2 \\ &\Leftrightarrow SO^2 = 2 - 1 \\ &\Leftrightarrow SO^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow SO = 1 \end{aligned}$$

Donc $SO = OB = OC$ donc le repère $(O; \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OS})$ est orthonormé.

2. (a)

$$\begin{aligned} \vec{SD} \begin{pmatrix} -1-0 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \vec{SD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \vec{SD} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or

$$\vec{SK} \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K - 1 \end{pmatrix}$$

donc,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_K &= -\frac{1}{3} \\ y_K &= 0 \\ z_K - 1 &= -\frac{1}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_K &= -\frac{1}{3} \\ y_K &= 0 \\ z_K &= 1 - \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_K &= -\frac{1}{3} \\ y_K &= 0 \\ z_K &= \frac{2}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow K \left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

(b)

$$\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-1 \\ 0-0 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Or

$$\frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0,5 \times \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

donc

$$\frac{4}{3}\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BK}.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires, donc les points B, I et K sont alignés.

- (c) Soit M le point tel que $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ alors M, I et C sont alignés (c'est la même démonstration que précédemment). Donc M appartient à (IC) qui est elle-même confondu dans le plan (BCI) . Donc M appartient à l'intersection de (BCI) et de $[SA]$ donc le point M est le point L . De plus

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{SL} \text{ d'après la relation de Chales} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires, donc les droites (KL) et (DA) sont parallèles.

(d)

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or

$$\overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} x_L + \frac{1}{3} \\ y_L \\ z_L - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Donc

$$x_L + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_L = 0,$$

et

$$y_L = -\frac{1}{3},$$

et

$$z_L - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow z_L = \frac{2}{3}.$$

Donc $L \left(0; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).$

3. (a) $\vec{BC}$ et $\vec{BI}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCI) . Donc $\vec{n}$ est normal à (BCI) si et seulement si il est orthogonal à $\vec{BC}$ et $\vec{BI}$. Or,

$$\vec{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\vec{n} \cdot \vec{BI} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 0,5 \times 2 = 0,$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{BC} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0,5 \times 0 = 0.$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{BI}$ et $\vec{BC}$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI) .

(b)

$$\vec{AS} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{DS} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\vec{n} = \vec{AS} + \vec{DS}.$$

Donc les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{AS}$, $\vec{DS}$ sont coplanaires.

- (c) Comme $\vec{n}$ est un vecteur normal à (BCI) . Or $\vec{AS}$, $\vec{DS}$ et $\vec{n}$ sont coplanaires et donc les plans (SAD) et (BCI) sont perpendiculaires et leur intersection est la droite (KL) .