

Bac S - Liban Session 2016

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Corrigé

Exercice 1

- (a) Le triangle AIE est rectangle en I. De plus AI est la moitié de la longueur AC, or [AC] est la diagonale d'un carré de côté 1, donc $AI = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
 AE^2 &= AI^2 + IE^2 \Leftrightarrow IE^2 = AE^2 - AI^2 \\
 &\Leftrightarrow IE^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow IE^2 = 1 - \frac{2}{4} \\
 &\Leftrightarrow IE^2 = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow IE = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &\Leftrightarrow IE = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (b) On a $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

. Si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ alors $\vec{n}$ est normal à (ABE). Or

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 1 - 2 \times 0 + \sqrt{2} \times 0 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{AE} = 0 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABE).

(c) $\vec{n}$ est normal au plan (ABE), donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel qu'une équation cartésienne de (ABE) soit

$$0 \times x - 2 \times y + \sqrt{2}z + c = 0$$

donc

$$-2y + \sqrt{2}z + c = 0.$$

Or, $A \in (ABE)$ donc

$$-2 \times 0 + \sqrt{2} \times 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Donc une équation du plan (ABE) est

$$-2y + \sqrt{2}z = 0.$$

2. (a) (FDC) et (ABE) sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ est un vecteur normal à (FDC) également. Or comme les deux pyramides sont identiques $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc

$$\vec{FD} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{DC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\vec{n} \cdot \vec{DC} = 0$$

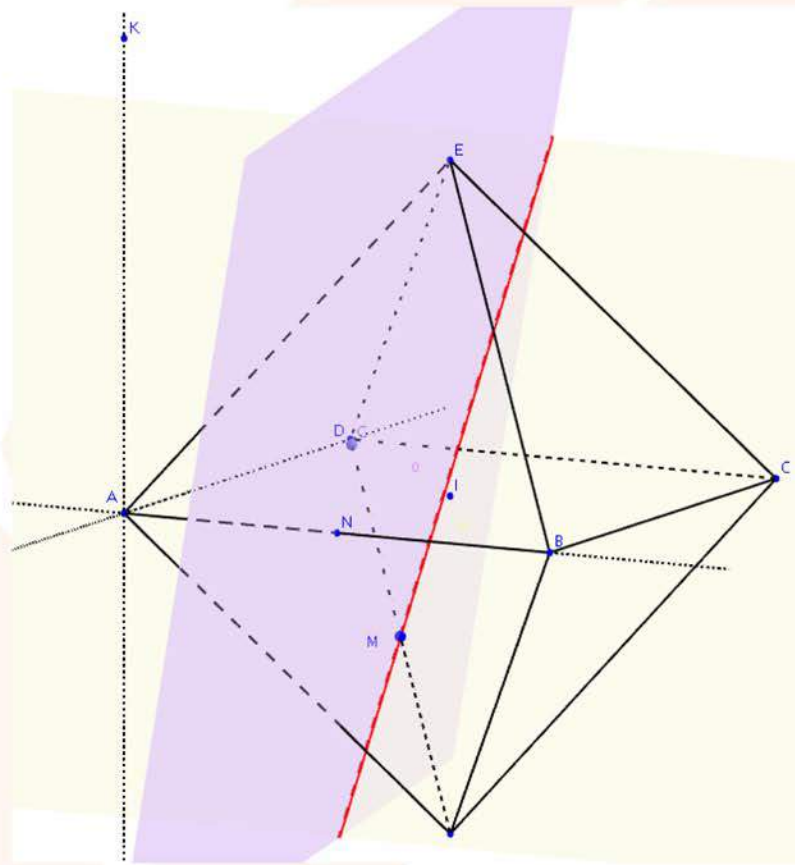
et

$$\vec{n} \cdot \vec{FD} = 0.$$

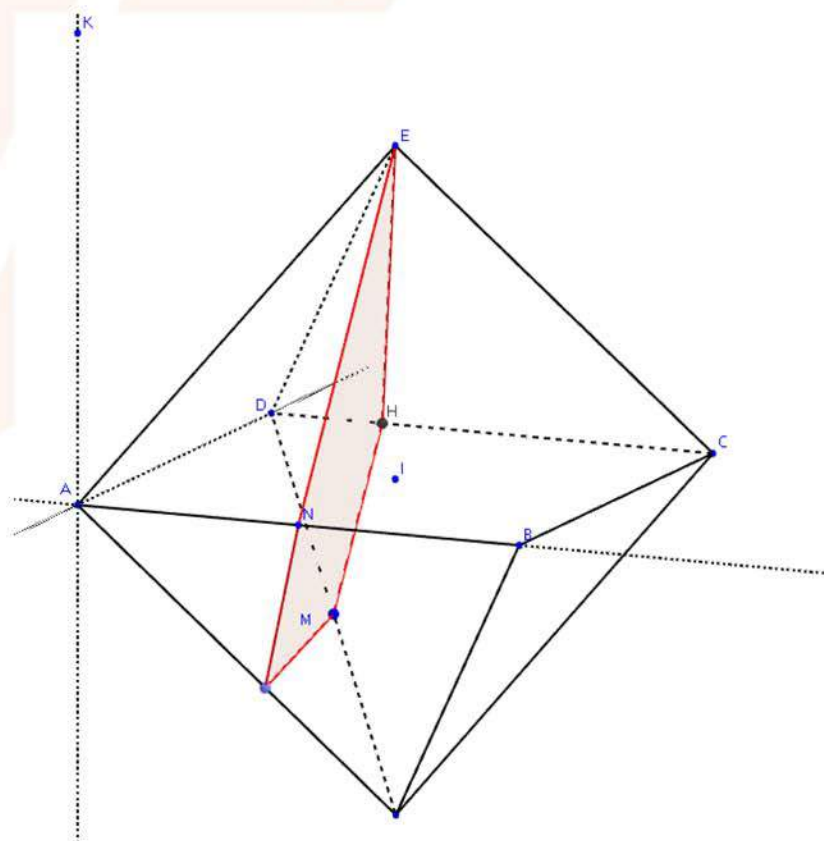
Donc $\vec{n}$ est normal au plan (FDC), donc les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

(b) M est le milieu du segment [DF] donc, M appartient à (EMN) et (FDC) donc (EMN) et (FDC) se coupent en une droite passant par le point M .

On sait que (FDC) et (ABE) sont parallèles or tout plan qui coupe le plan (FDC) coupe le plan (ABE) et les droites d'intersection sont parallèles. Donc (EMN) coupe (FDC) et (ABE) en deux droites parallèles. Or (EMN) coupe le plan (AEB) en (EN), il coupe donc le plan (FDC) en la parallèle à (EN) qui passe par M .



(c)



Exercice 2

Partie A :

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles qui sont allées à droite sur les 20 balles lancées. Les lancers sont identiques et indépendants, un lancer est une épreuve de Bernoulli dont le succès est «la balle est allée à droite» de probabilité 0,5. Donc X suit une loi binomiale $B(20; 0,5)$.
On cherche alors

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} 0,5^{10} \times 0,5^{20-10} \approx 0,176 \text{ d'après la calculatrice.}$$

2. On cherche $P(5 \leq X \leq 10)$, or :

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 10) &= P(X \leq 10) - P(X < 5) \\ &= P(X \leq 10) - P(X \leq 4) \\ &\approx 0,582 \text{ d'après la calculatrice} \end{aligned}$$

Partie B :

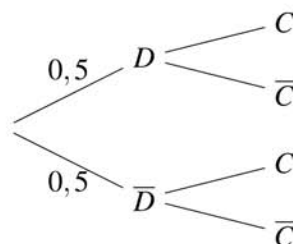
On a $n = 100 \geq 5$ et $np = n(1 - p) = 100 \times 0,5 = 50 \geq 5$ donc on peut calculer I l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% des fréquences des échantillons de taille 100 :

$$I = \left[0,5 - 1,96 \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{100}}; 0,5 + 1,96 \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{100}} \right] = [0,402; 0,598].$$

Or la fréquence observée par le joueur est de $\frac{42}{100} = 0,42$. Or $0,42 \in I$ donc on ne peut pas dire que les doutes du joueur soient justifiés.

Partie C :

On appelle D l'évènement «la balle va à droite» et $\bar{C}$ l'évènement «la balle est coupée», on peut donc modéliser la situation par l'arbre suivant :



On cherche $P_C(D)$ or il faut trouver $P(C)$ pour pouvoir le faire, donc on va compléter l'arbre.

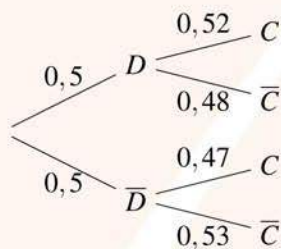
On sait que $P(\bar{C} \cap D) = 0,24$ et $P(C \cap \bar{D}) = 0,235$. Alors

$$P_D(\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,24}{0,5} = 0,48$$

et

$$P_{\bar{D}}(C) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,235}{0,5} = 0,47.$$

Donc l'arbre complété est le suivant :



ainsi,

$$P(C) = P(D \cap C) + P(\bar{D} \cap C) = 0,5 \times 0,52 + 0,5 \times 0,47 = 0,495.$$

Or

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0,5 \times 0,52}{0,495} \approx 0,525.$$

Donc si le lance-balle envoie une balle coupée, la probabilité qu'elle soit envoyée à droite est de 0,525.

Exercice 3

Partie A :

1. f est dérivable sur $[0; 1]$, et pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2} \\ &= \frac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2} \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{1-x} > 0$ et $(1+e^{1-x})^2 > 0$ donc :

x	0	1
$f'(x)$	$\frac{1}{1+e}$	$\frac{1}{2}$

Car

$$f(0) = \frac{1}{1+e^{1-0}} = \frac{1}{1+e}$$

et

$$f(1) = \frac{1}{1+e^{1-1}} = \frac{1}{2}.$$

2. Soit $x \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+e^{1-x}} \\ &= \frac{e^x \times 1}{e^x \times (1+e^{1-x})} \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^{x+1-x}} \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^1} \\ &= \frac{e^x}{e^x + e} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in [0; 1]$ alors $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$.

3. En se servant de la question précédente,

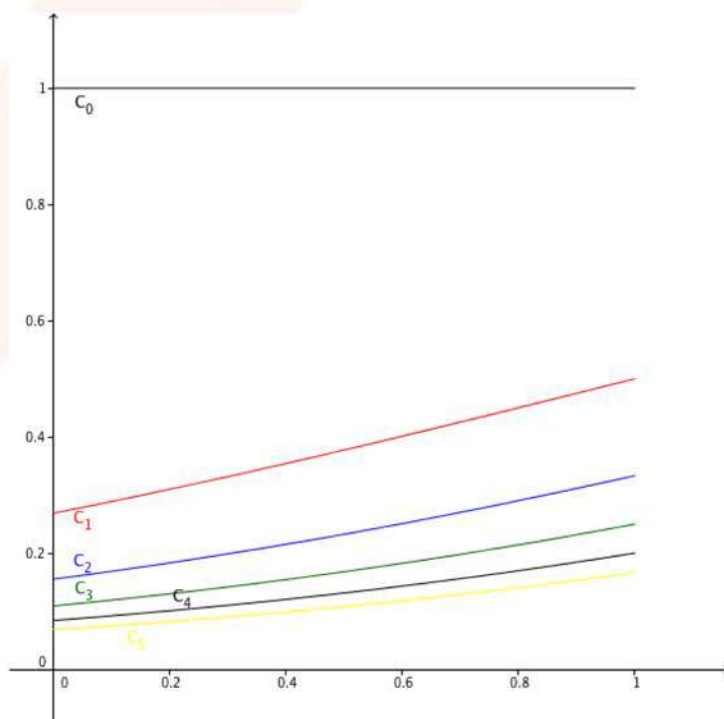
$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{(e^x + e)'}{e^x + e} dx \\
 &= [\ln(e^x + e)]_0^1 \\
 &= \ln(e^1 + e) - \ln(e^0 + e) \\
 &= \ln(2e) - \ln(1 + e) \\
 &= \ln(2) + \ln(e) - \ln(1 + e) \\
 &= \ln(2) + 1 - \ln(1 + e)
 \end{aligned}$$

Partie B :

1. Soit $x \in [0; 1]$ alors

$$f_0(x) = \frac{1}{1 + 0 \times e^{1-x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Alors le tracé de C_0 est le suivant :



2. Soit n un entier naturel, alors u_n est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f_n , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Ainsi u_0 est l'aire d'un carré de côté 1, donc $u_0 = 1$.

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante. Montrons cette conjecture. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)dx - \int_0^1 f_n(x)dx \\
 &= \int_0^1 (f_{n+1}(x) - f_n(x))dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + (n+1)e^{1-x}} - \frac{1}{1 + ne^{1-x}} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1 + ne^{1-x} - (1 + (n+1)e^{1-x})}{(1 + (n+1)e^{1-x})(1 + ne^{1-x})} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{-e^{1-x}}{(1 + (n+1)e^{1-x})(1 + ne^{1-x})} dx
 \end{aligned}$$

Or $\forall x \in [0; 1], (1 + (n+1)e^{1-x})(1 + ne^{1-x}) > 0$ et $-e^{1-x} < 0$ donc $\frac{-e^{1-x}}{(1 + (n+1)e^{1-x})(1 + ne^{1-x})} < 0$ donc par positivité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{-e^{1-x}}{(1 + (n+1)e^{1-x})(1 + ne^{1-x})} < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc (u_n) est décroissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1], f_n(x) > 0$, donc $u_n > 0$ par positivité de l'intégrale.

Donc (u_n) est une suite décroissante minorée par 0 donc elle admet une limite.

Exercice 4

Affirmation 1 : FAUSSE

On sait que $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$ or $P(\mu - 1,6 \leq X \leq \mu + 1,6) = 0,68$ d'après la symétrie de la loi normale. On va utiliser les propriétés connues sur les intervalles de la loi normale. On sait que

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$$

Donc

$$P(16,8 \leq X \leq 23,2) \approx 0,954$$

Donc par symétrie de la loi,

$$P(X \geq 23,2) \approx \frac{1 - 0,954}{2}$$

donc

$$P(X \geq 23,2) \approx 0,023.$$

Affirmation 2 : VRAIE

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$,

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow |Z| = \left| \frac{iz}{z-2} \right|$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{|iz|}{|z-2|}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{|i||z|}{|z-2|}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{|z|}{|z-2|}$$

$$\Leftrightarrow |z-2| = |z|$$

Donc l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est l'ensemble des points du plan à égale distance de $O(0;0)$ et de $B(2;0)$. Donc c'est la médiatrice du segment $[OB]$ qui passe par son milieu qui est $A(1;0)$.

Affirmation 3 : FAUSSE

$z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ donc il existe a et b des nombres réels tel que $z = a + ib$.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{iz}{z-2} \\ &= \frac{i(a+ib)}{a+ib-2} \\ &= \frac{(ia-b)(a-2-ib)}{a-2+ib)(a-2-ib)} \\ &= \frac{ia^2 - 2ia + ab - ba + 2b + ib^2}{(a-2)^2 + b^2} \\ &= \frac{i(a^2 + b^2 - 2a) + 2b}{(a-2)^2 + b^2} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} Z \text{ est un imaginaire pur} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \text{ et } z \neq 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2b}{(a-2)^2 + b^2} = 0 \text{ et } z \neq 2 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ et } z \neq 2 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ et } z \neq 2 \\ &\Leftrightarrow z \text{ est un réel différent de } 2. \end{aligned}$$

Remarque :

On aurait pu penser rédiger de la manière suivante : « si $z = 2$, z est un réel mais Z n'est pas défini donc ne peut être un imaginaire pur. Donc la proposition est fausse ».

Affirmation 4 : VRAIE

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{3(-12e^{-2x})}{(4+6e^{-2x})} = \frac{36e^{-2x}}{(4+6e^{-2x})}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$ et $(4+6e^{-2x}) > 0$ donc f est strictement croissante. De plus, $f(0) = \frac{3}{10} = 0,3$. Il nous reste à savoir si la limite de f en $+\infty$ est plus grande que 0,5. Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + 6e^{-2x} = 4,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4 + 6e^{-2x}} = \frac{3}{4}.$$

Donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(0) = 0,3 < 0,5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{4} > 0,5$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0,5$ sur $\mathbb{R}$ (et même sur $[0; +\infty[$).

Affirmation 5 : FAUSSE

Cet algorithme donne la première valeur (à 0,01 près) de x telle que $f(x) \geq 0,5$. Or d'après la fonction table de la calculatrice on trouve $x = 0,55$. Donc l'algorithme devrait afficher 0,55.

Exercice 5

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_{n+1} - z_A \\ &= \frac{1}{2}i \times z_n + 5 - (4 + 2i) \\ &= \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}i \times u_n &= \frac{1}{2}i(z_n - 4 - 2i) \\ &= \frac{1}{2}i \times z_n - 2i + 1 \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

(b) On va montrer cette propriété par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P_n : \langle u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i) \rangle.$$

Initialisation : Montrons que P_0 est vraie.

$$u_0 = z_0 - z_A = 0 - 4 - 2i = -4 - 2i$$

et

$$\left(\frac{1}{2}i\right)^0 (-4 - 2i) = -4 - 2i$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Montrons que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie. On suppose donc P_n vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}i \times u_n \\ &= \frac{1}{2}i \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i) \\ &= \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (-4 - 2i) \end{aligned}$$

Donc si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie. Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Donc l'hérédité est prouvée.

On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$.

2. On cherche

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+4}}) &= \arg \left(\frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} \right) \\&= \arg \left(\frac{u_n}{u_{n+4}} \right) \\&= \arg \left(\frac{\left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)}{\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4} (-4 - 2i)} \right) \\&= \arg \left(\frac{1}{i^4} \right) \\&= \arg \left(\frac{1}{1} \right) \\&= \arg(1) - \arg \left(\frac{1}{2^4} \right) \\&= 0\end{aligned}$$

Donc

$$(\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+4}}) = 0 [\pi]$$

donc A , M_n et M_{n+4} sont alignés.