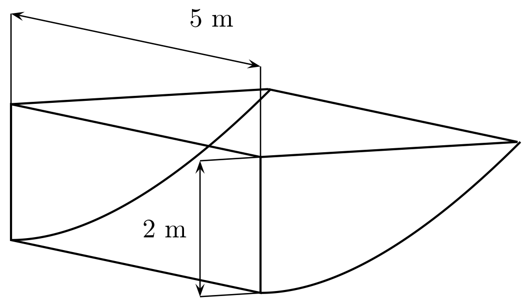
Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points) (commun à tous les candidats)

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau. Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

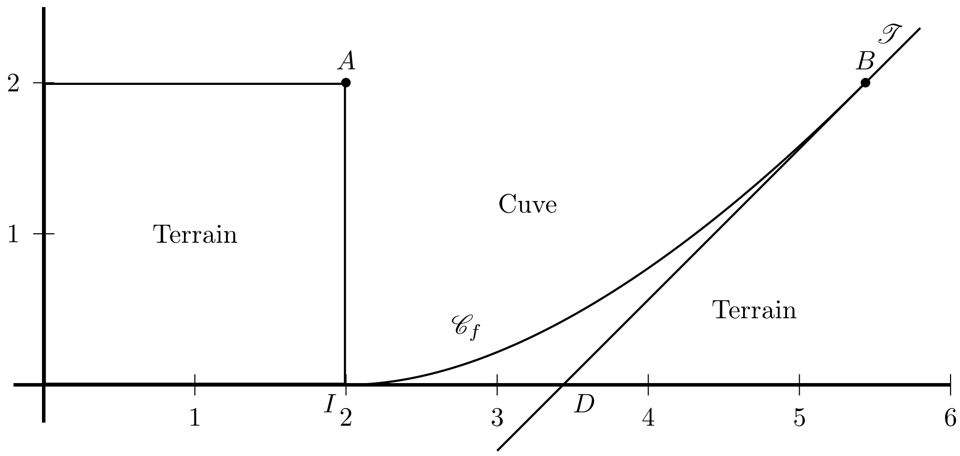
Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$ définie par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unités 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points $A(2\ ;\ 2)$, $I(2\ ;\ 0)$ et $B(2e\ ;\ 2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1) Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2) On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.

a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2e$.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3) a) Montrer que, sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$, la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$.

c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$

1) Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2) On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel b est un réel

Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur $2e$
	Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire :
	    c prend la valeur $(a+b)/2$
	    Si $v(c) < V/2$, alors :
	        a prend la valeur c
	    Sinon
	        b prend la valeur c
	    Fin Si
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher $f(c)$

