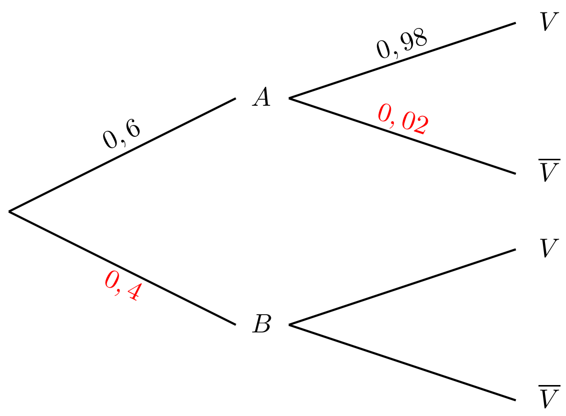
Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) L'énoncé donne $P(V) = 0,96$, $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(A \cap V)$.

$$P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588.$$

2) D'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$ et donc

$$P(B \cap V) = P(V) - P(A \cap V) = 0,96 - 0,588 = 0,372.$$

Ensuite,

$$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0,372}{0,4} = 0,93.$$

3) La probabilité demandée est $P_V(B)$.

$$P_{\overline{V}}(B) = \frac{P\left(\overline{V} \cap B\right)}{p(V)} = \frac{P(B) - P(V \cap B)}{1 - (P(A \cap V) + P(B \cap V))} = \frac{0,4 - 0,372}{1 - (0,372 + 0,588)} = \frac{0,028}{0,0,04} = 0,7.$$

Le technicien a donc raison.

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1)$. La calculatrice fournit $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) = 0,9309\ldots$ ou encore $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) = 0,93$ au centième près.

D'autre part, $P_B(V) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(B)} = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$. Donc, la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien égale au centième près à celle de la partie A.

2) $0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1 \Leftrightarrow -0,1 \leqslant Y - 1 \leqslant 0,1 \Leftrightarrow -\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant \dfrac{Y-1}{\sigma'} \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}$. On sait que la variable $Z = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite et de plus, $P\left(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1\right) = P\left(-\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}\right)$. Ensuite, pour des raisons de symétries,

$$P\left(Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = P\left(-\frac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) + P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98 + \frac{0,02}{2} = 0,99.$$

La calculatrice fournit

$$P\left(Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,99 \Leftrightarrow \frac{0,1}{\sigma'} = 2.3263\ldots \Leftrightarrow \sigma' = 0,0429\ldots$$

Donc, $\sigma' = 0,043$ arrondi à 10^{-3}.

Partie C

1) a) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de billes noires dans le sachet.

- 40 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.
- chaque expérience a deux issues à savoir « la bille est noire » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{5}$ et « la bille n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{4}{5}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \dfrac{1}{5}$. La probabilité demandée est $P(X = 10)$. On sait que

$$P(X = 10) = \binom{40}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{40-10} = 0,107 \text{ arrondi à } 10^{-3}$$

(fourni par la calculatrice).

b) Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95%. Ici, $n = 40$ et $p = \dfrac{1}{5} = 0,2$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 8$ et $n(1-p) = 32$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,2 - 1,96\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{40}}, 0,25 + 1,96\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{40}}\right] = [0,07; 0,33]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{12}{40} = 0,3$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2) Soit n le nombre de billes dans un sachet. Le nombre de billes noires de ce sachet est une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$. La probabilité que le sachet contienne au moins une bille noire est

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,8)^n.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,8)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geqslant (0,8)^n \Leftrightarrow (0,8)^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,8)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 20,6\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le nombre minimal de billes que doit contenir un sachet pour avoir une probabilité supérieure à 0,99 d'avoir au moins une bille noire est 21.

