

Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

Partie A : modélisation discrète

1) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$T_0 = 25 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,85T_n + 15.$$

La température, exprimée en degrés Celsius, de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est T_3 .

- $T_1 = 0,85T_0 + 15 = 0,85 \times 25 + 15 = 36,25^\circ$
- $T_2 = 0,85T_1 + 15 = 0,85 \times 36,25 + 15 = 45,8125^\circ$
- $T_3 = 0,85T_2 + 15 = 0,85 \times 45,8125 + 15 = 53,940625^\circ$

La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est de 54° arrondie à l'unité.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n$.

- $100 - 75 \times (0,85)^0 = 100 - 75 = 25 = T_0$. Donc, l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n$.

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0,85T_n + 15 \\ &= 0,85(100 - 75 \times (0,85)^n) + 15 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 85 - 75 \times (0,85)^{n+1} + 15 \\ &= 100 - 75 \times (0,85)^{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} T_n \geq 85 &\Leftrightarrow 100 - 75 \times (0,85)^n \geq 85 \Leftrightarrow -75 \times (0,85)^n \geq -15 \\ &\Leftrightarrow 75 \times (0,85)^n \leq 15 \Leftrightarrow (0,85)^n \leq \frac{15}{75} \Leftrightarrow (0,85)^n \leq 0,2 \\ &\Leftrightarrow \ln((0,85)^n) \leq \ln(0,2) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,85) \leq \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)} \text{ (car } \ln(0,85) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 9,9 \dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 10 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

La stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $t \geq 0$,

$$f'(t) = 0 - 75 \left(-\frac{\ln 5}{10} \right) e^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5 \ln(5) e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

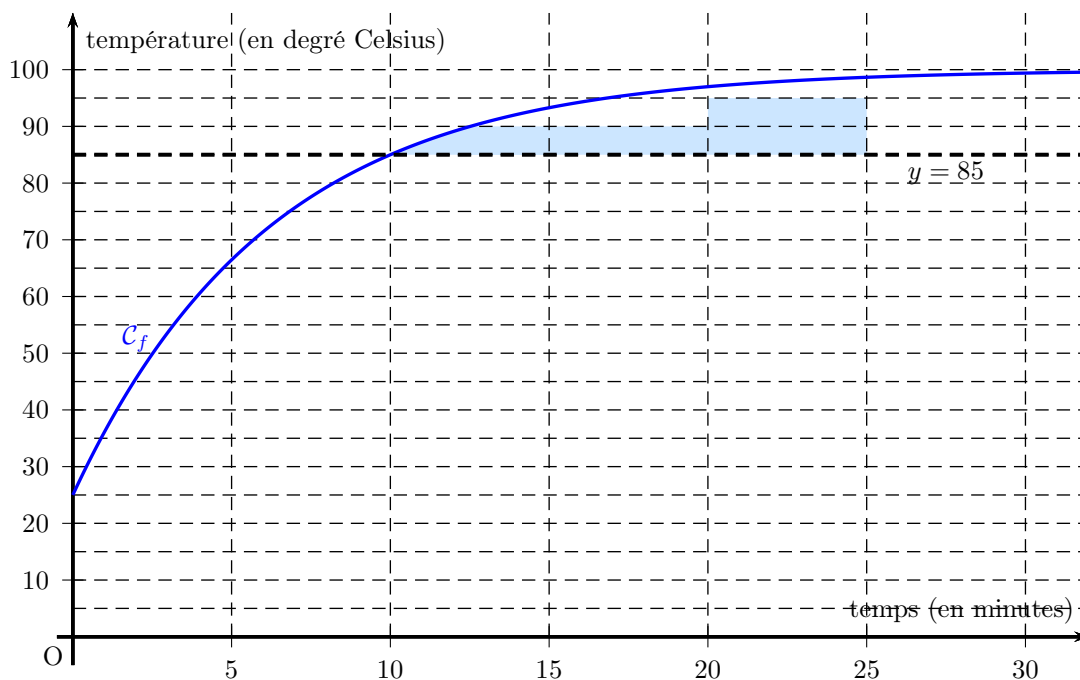
Puisque $5 > 1$, $\ln 5 > 0$. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $[0, +\infty[$. On en déduit que

La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) $f(10) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10} \times 10} = 100 - 75e^{-\ln 5} = 100 - 75 \frac{1}{e^{\ln 5}} = 100 - \frac{75}{5} = 100 - 15 = 85.$

Puisque la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$, si $t \geq 10$, alors $f(t) \geq f(10)$ ou encore $f(t) \geq 85$.

2) a) L'aire, exprimée en unités d'aire, d'un rectangle en pointillé est égale à 5×5 ou encore 25. 3 rectangles ont déjà une aire égale à 75 unités d'aire. L'aire du domaine en bleu est donc clairement strictement supérieure à 80 et il en est de même de $\mathcal{A}(25)$.



b) Soit $\theta \geq 10$. Pour $t \in [10, \theta]$, $f(t) \geq 85$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85) dt = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) dt \\ &= 15 \int_{10}^{\theta} 1 dt - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt.\end{aligned}$$

c) Par suite,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(20) &= 15(20 - 10) - 75 \int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt = 150 - 75 \left[\frac{e^{-\frac{\ln 5}{10}t}}{-(\ln 5)/10} \right]_{10}^{20} = 150 - 75 \frac{e^{-2 \ln 5} - e^{-\ln 5}}{-(\ln 5)/10} \\ &= 150 + \frac{750}{\ln 5} \left(\left(\frac{1}{e^{\ln 5}} \right)^2 - \frac{1}{e^{\ln 5}} \right) = 150 + \frac{750}{\ln 5} \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5} \right) = 150 + \frac{750}{\ln 5} \left(-\frac{4}{25} \right) \\ &= 150 - \frac{120}{\ln 5} = 75,4 \dots\end{aligned}$$

$\mathcal{A}(20) < 80$ et donc la stérilisation n'est pas terminée au bout de 20 minutes.