Polynésie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) On sait que pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,2t}.$$

Par suite,

$$P(T \leqslant 3) = 1 - e^{-0,2\times 3} = 1 - e^{-0,6} = 0,451 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} P(T \leqslant t) = 0,95 &\Leftrightarrow 1 - e^{-0,2t} = 0,95 \Leftrightarrow -e^{-0,2t} = -0,05 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,05 \\ &\Leftrightarrow -0,2t = \ln(0,05) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,05)}{0,2} \Leftrightarrow t = 14,9\ldots \\ &\Leftrightarrow t = 15 \text{ min arrondi à la minute.} \end{aligned}$$

Le groupe doit attendre 15 minutes arrondi à la minute pour avoir une probabilité de $0,95$ de voir une nouvelle étoile filante.

3) On sait que l'espérance de T est $\dfrac{1}{\lambda}$ c'est-à-dire 5. Ceci signifie qu'il s'écoule en moyenne 5 minutes entre deux apparitions d'étoiles filantes ou encore que dans chaque intervalle de temps de 5 minutes, le groupe voit en moyenne une étoile filante. Comme 2 heures sont égales à 24 intervalles de temps de 5 minutes, on peut estimer à 24 en moyenne le nombre d'étoiles filantes vues par le groupe pendant 2 heures (et pas à 25 car le début de la sortie n'a aucune raison de coïncider avec l'apparition d'une étoile filante).

Partie B

1) Notons N l'événement « la personne est un nouvel adhérent » et T l'événement « la personne possède un télescope personnel ».
L'énoncé fournit $P(N) = 0,64$, $P\left(\overline{N} \cap T\right) = 0,27$ et $P_N\left(\overline{T}\right) = 0,65$. La probabilité demandée est $P(T)$

Tout d'abord, $P_{\overline{N}}(T) = \dfrac{P\left(\overline{N} \cap T\right)}{P\left(\overline{N}\right)} = \dfrac{0,27}{1 - 0,64} = \dfrac{0,27}{0,36} = 0,75$. Ensuite, $P\left(\overline{N}\right) = 1 - P(N) = 1 - 0,64 = 0,36$ et $P_N(T) = 1 - P_N\left(\overline{T}\right) = 1 - 0,65 = 0,35$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(N) \times P_N(T) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(T) = 0,64 \times 0,35 + 0,36 \times 0,75 = 0,494.$$

2) La probabilité demandée est $P_T(N)$.

$$P_T(N) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)} = \frac{P(N) \times P_N(T)}{P(T)} = \frac{0,64 \times 0,35}{0,494} = 0,453 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Partie C

Sous l'hypothèse que $p = 0,5$, déterminons un intervalle de fluctuation au seuil 95%. On note que $n = 100$ et donc $n \geqslant 30$ puis $np = n(1-p) = 50$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\begin{aligned} \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] &= \left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{100}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{100}}\right] \\ &= \left[0,5 - 1,96\frac{0,5}{10}; 0,5 + 1,96\frac{0,5}{10}\right] = [0,402; 0,598]. \end{aligned}$$

La fréquence observée est $f = 0,54$. f appartient à l'intervalle de fluctuation. Le résultat du sondage ne l'amène pas à changer d'avis.

