

Polynésie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Pour tout réel positif t , $C'(t)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse t . Sur la courbe $\mathcal{C}_1$ ou sur la courbe $\mathcal{C}_2$, le coefficient directeur le plus grand est celui de la tangente en le point de coordonnées $(0, 0)$. Donc, la vitesse d'apparition dans le sang est maximale à l'instant $t = 0$ c'est-à-dire au moment où l'individu ingère l'alcool.

2) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_1$ en le point de coordonnées $(0, 0)$ est plus grand que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_2$ en ce même point. Donc, la personne P_1 subit plus vite les effets de l'alcool que la personne P_2 . La personne la plus corpulente est donc la personne P_2 .

3) a) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $t \geq 0$,

$$f'(t) = A(1 \times e^{-t} + t \times (-1)e^{-t}) = A(1 - t)e^{-t}.$$

En particulier, $f'(0) = A(1 - 0)e^0 = A$.

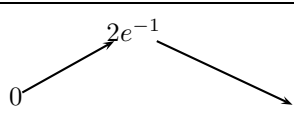
b) Plus A est grand, plus vite la personne subit les effets de l'alcool et donc moins la personne est corpulente. L'affirmation de l'énoncé est fausse.

Partie B. Un cas particulier

1) D'après le calcul effectué à la question précédente, pour tout réel $t \geq 0$,

$$f'(t) = 2(1 - t)e^{-t}.$$

Pour tout réel $t \geq 0$, $2e^{-t} > 0$ et donc, pour tout réel $t \geq 0$, le signe de $f'(t)$ est le signe de $1 - t$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f .

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
f			

2) La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1 heure après l'ingestion de l'alcool. La valeur maximale de cette concentration est $2e^{-1}$ gramme par litre soit 0,74 gramme par litre en arrondissant à 10^{-2} .

3) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$. Or, pour tout réel strictement positif t ,

$$f(t) = 2te^{-t} = 2 \times \frac{t}{e^t} = 2 \times \frac{1}{e^t/t}.$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t/t} = 0$ puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2 \times 0 = 0$.

Ceci signifie qu'après un très long moment, l'alcool a presque complètement disparu dans le sang.

4) a) La fonction f est continue sur $[0, 1]$. De plus, $f(0) = 0$ et donc $f(0) < 0,2$ et aussi $f(1) = 2e^{-1} = 0,7 \dots$ et donc $f(1) > 0,2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel t_1 dans $[0, 1]$ et même $]0, 1[$ tel que $f(t_1) = 0,2$.

De même, la fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ avec $f(1) > 0,2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) < 0,2$. D'après une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel t_2 dans $[1, +\infty[$ et même $]1, +\infty[$ tel que $f(t_2) = 0,2$.

b) Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, pour t dans $[1, +\infty[$, si $t < t_2$, alors $f(t) > 0,2$ et si $t > t_2$, alors $f(t) < 0,2$. Paul devra donc attendre t_2 heures avant de reprendre le volant.

La calculatrice fournit $f(3,57) = 0,201 \dots$ et $f(3,58) = 0,19 \dots$. On en déduit que $3,575 < t_2 < 3,58$ ou encore $3 \text{ h } 34,5 \text{ min} < t_2 < 3 \text{ h } 34,8 \text{ min}$. Donc, $t_2 = 3 \text{ h } 35 \text{ min}$ arrondi à la minute la plus proche.

5) a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. Donc, il existe un intervalle de la forme $[T, +\infty[$ tel que pour $t \in [T, +\infty[$, $f(t) < 5 \times 10^{-3}$. A partir de l'instant T (et peut-être même avant), la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b) Tableau complété.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6	Étape 7	Étape 8
p	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5
C	0,21	0,18	0,15	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06	0,04

L'algorithme affiche alors 5,5 qui est un temps, exprimé en heures, à partir duquel la quantité d'alcool dans le sang n'est plus détectable. Plus précisément, l'algorithme affiche une valeur approchée à 0,25 près du temps, exprimé en heures, à partir duquel la quantité d'alcool dans le sang n'est plus détectable.