Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1) a) Vérifier que $1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.$$

b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Interpréter géométriquement d_n.

b) Calculer d_0.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d) En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c) Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

d) Justifier cette construction.

ANNEXE 2 de l'exercice 4