Liban 2016. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) Soit n un entier relatif.

$$\left\{\begin{array}{ll} n \equiv 1 & [5] \\ n \equiv 3 & [4] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} n-11 \equiv -10 & [5] \\ n-11 \equiv -8 & [4] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} n-11 \equiv 0 & [5] \\ n-11 \equiv 0 & [4] \end{array}\right.$$

$\Rightarrow n-11$ est divisible par 4 et par 5.

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est vraie.}}$

2) Soient k un entier relatif puis $n = 11 + 20k$.
$n = 1 + 10 + 20k = 1 + 5(2 + 4k)$ avec $2 + 4k$ entier relatif. Donc, $n \equiv 1 \quad [5]$.
$n = 3 + 8 + 20k = 3 + 4(2 + 5k)$ avec $2 + 5k$ entier relatif. Donc, $n \equiv 3 \quad [4]$.

$\boxed{\text{l'affirmation 2 est vraie.}}$

3) Soit n un entier relatif solution du système. Alors, $n-11$ est divisible par 4 et par 5 d'après la question 1). Puisque les entiers 4 et 5 sont premiers entre eux, $n-11$ est divisible par $4 \times 5 = 20$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $n - 11 = 20k$ ou encore $n = 11 + 20k$.

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est vraie.}}$

4) Notons A_n (respectivement B_n) l'événement « à l'instant n, l'automate est dans l'état A (respectivement B) ». D'après la formule des probabilités totales,

$$a_{n+1} = P\left(A_{n+1}\right) = P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(B_n\right) \times P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) = 0,3a_n + 0,8b_n.$$

Dans la partie « traitement » de l'algorithme devrait être écrit « a prend la valeur $0,3a + 0,8b$ » et non pas « a prend la valeur $0,8a + 0,3b$ »

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est fausse.}}$

5) • $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
• $a_1 = 0,3a_0 + 0,8b_0 = 0,8$ et $b_1 = 1 - a_1 = 0,2$.
• $a_2 = 0,3 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 = 0,4$ et $b_2 = 1 - a_2 = 0,6$.
• $a_3 = 0,3 \times 0,4 + 0,8 \times 0,6 = 0,6$ et $b_3 = 1 - a_3 = 0,4$.
• $a_4 = 0,3 \times 0,6 + 0,8 \times 0,4 = 0,5$ et $b_4 = 1 - a_4 = 0,5$.

$\boxed{\text{L'affirmation 5 est vraie.}}$

