

Liban 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Pour tout réel x de $[0, 1]$, $1 + e^{1-x} > 1$ et en particulier, pour tout réel x de $[0, 1]$, $1 + e^{1-x} \neq 0$. La fonction f est donc dérivable sur $[0, 1]$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $[0, 1]$. Pour tout réel x de $[0, 1]$,

$$f'(x) = -\frac{(1 + e^{1-x})'}{(1 + e^{1-x})^2} = -\frac{0 + (1-x)'e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2} = -\frac{-e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2} = \frac{e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2}.$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $[0, 1]$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

2) Soit x un réel de $[0, 1]$.

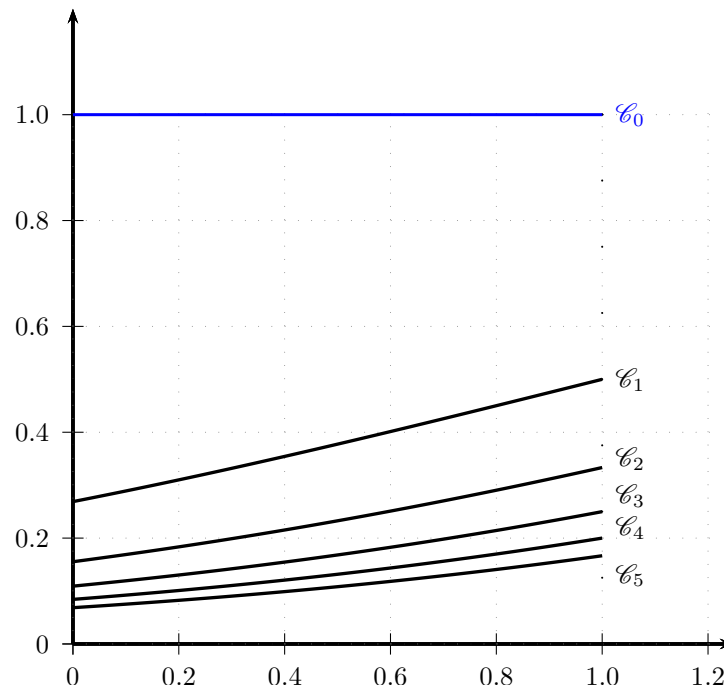
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}} = \frac{1}{1 + \frac{e^1}{e^x}} = \frac{1}{\left(\frac{e^x + e}{e^x}\right)} = \frac{e^x}{e^x + e}.$$

3) La fonction f est de la forme $\frac{u'}{u}$ où u est la fonction $x \mapsto e^x + e$. De plus, la fonction u est strictement positive sur $[0, 1]$ et donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= [\ln(e^x + e)]_0^1 = \ln(e^1 + e) - \ln(e^0 + e) = \ln(2e) - \ln(1 + e) = \ln(2) + \ln(e) - \ln(1 + e) \\ &= \ln(2) + 1 - \ln(1 + e). \end{aligned}$$

Partie B

1) Graphique.



2) Soit n un entier naturel. La fonction f_n est continue et positive sur $[0, 1]$. On en déduit que u_n est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_n$ d'une part et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part. En particulier, $u_0 = 1$.

3) D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Démontrons ce résultat.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
n \leq n+1 &\Rightarrow \text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], \quad ne^{1-x} \leq (n+1)e^{1-x} \text{ (car } e^{1-x} > 0) \\
&\Rightarrow \text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], \quad 1 + ne^{1-x} \leq 1 + (n+1)e^{1-x} \\
&\Rightarrow \text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], \quad \frac{1}{1 + ne^{1-x}} \geq \frac{1}{1 + (n+1)e^{1-x}} \text{ (car } 1 + (n+1)e^{1-x} > 0) \\
&\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1 + ne^{1-x}} \geq \int_0^1 \frac{1}{1 + (n+1)e^{1-x}} dx \text{ (par croissance de l'intégrale)} \\
&\Rightarrow u_n \geq u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$. Ceci montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et est minorée par 0. On sait alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.