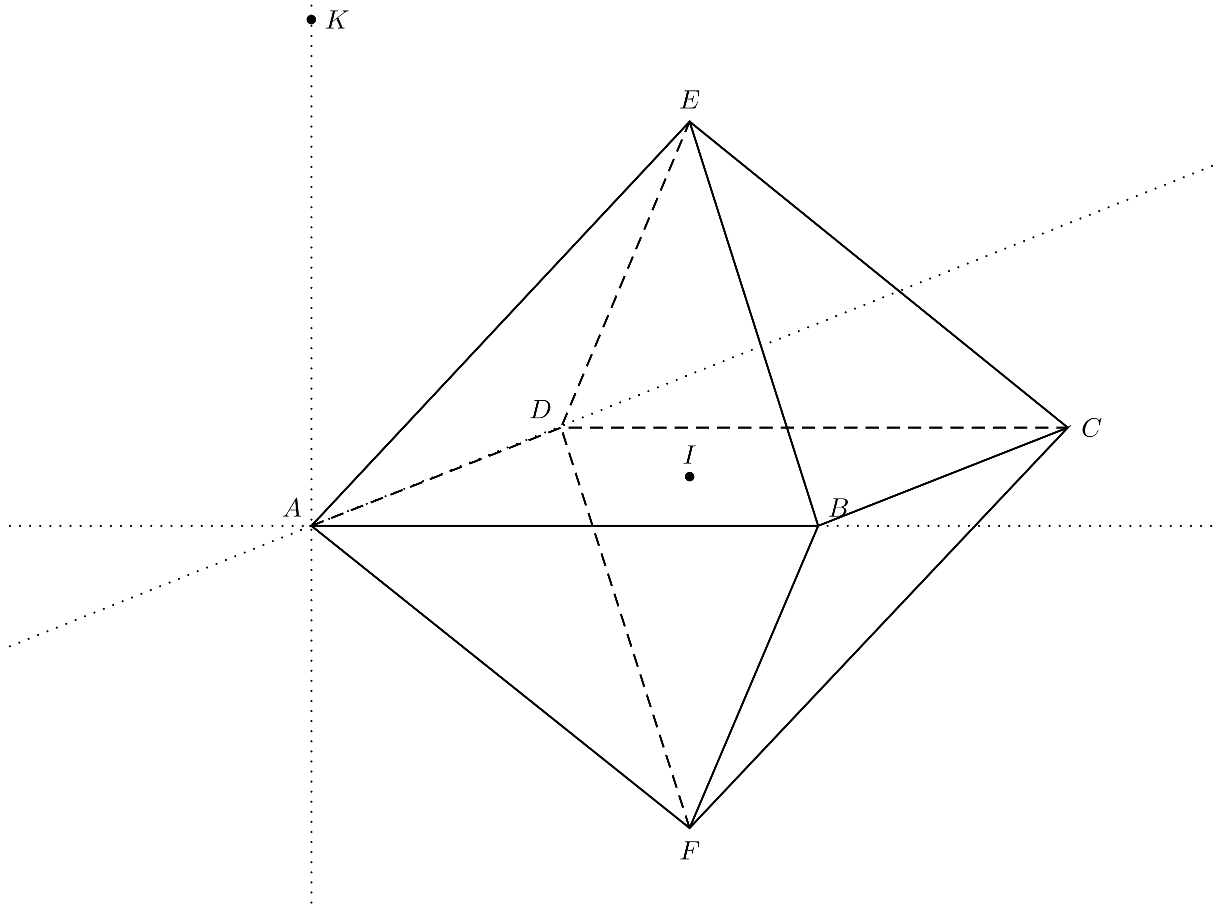
Liban 2016. Enseignement spécifique



1) a) Les points A et C ont pour coordonnées respectives $(0,0,0)$ et $(1,1,0)$. Donc le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Par suite,

$$AI^2=\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(0-0)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

La droite (IE) est perpendiculaire au plan (ABC) et donc la droite (IE) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (IE) est orthogonale à la droite (AI). D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEI, rectangle en I,

$$IE^2=AE^2-AI^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

puis $IE=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a vu que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ et donc, les points E et F ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

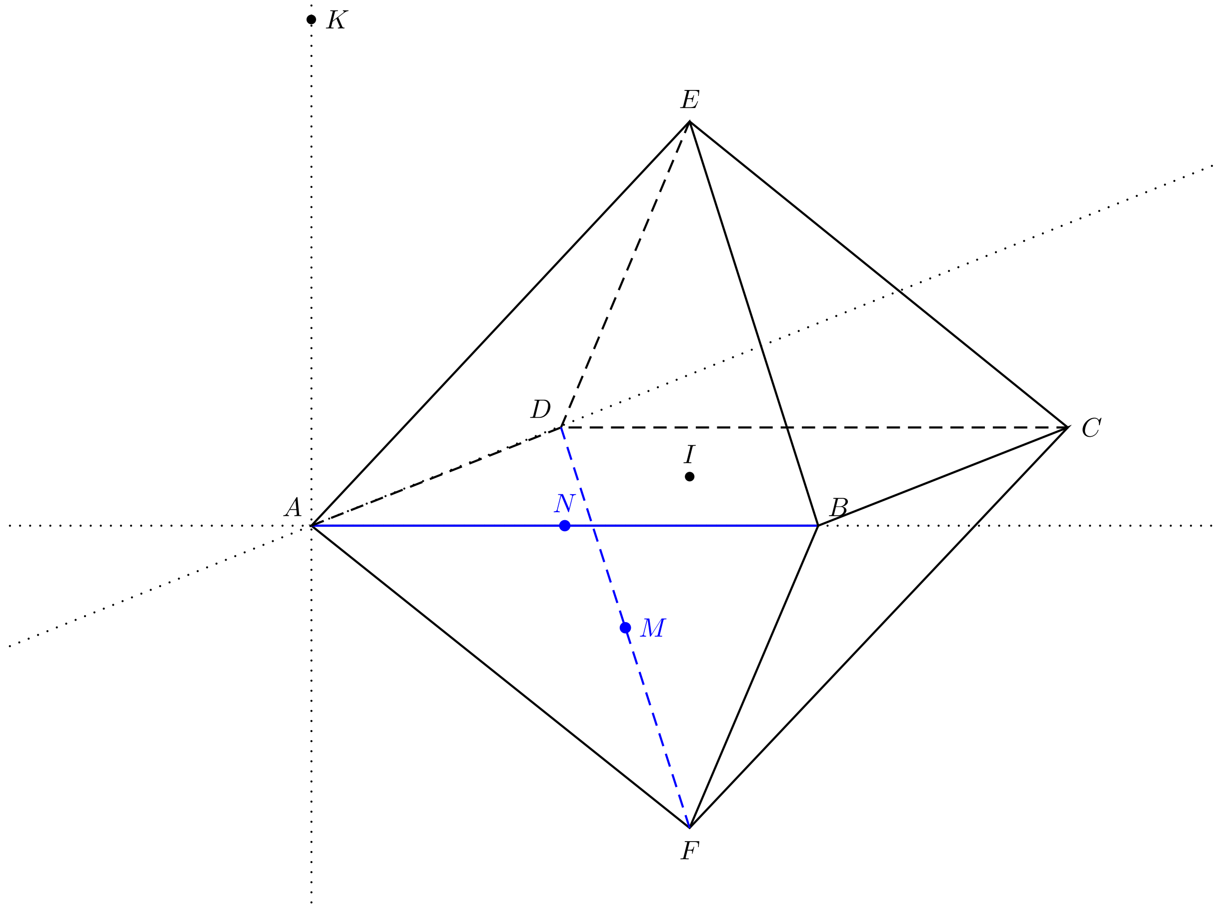
b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ont pour coordonnées respectives $(1,0,0)$ et $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On note que ces vecteurs ne sont pas colinéaires (en analysant leur deuxième coordonnée).

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB}=0\times 1-2\times 0+\sqrt{2}\times 0=0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AE}=0\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1+\frac{2}{2}=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABE). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABE).

c) Le plan (ABE) est le plan passant par $A(0,0,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\left(0,-2,\sqrt{2}\right)$. Une équation cartésienne du plan (ABE) est donc $-2y+\sqrt{2}z=0$ ou encore $-\sqrt{2}y+z=0$ après division des deux membres de l'équation par $\sqrt{2}$.

2) a)

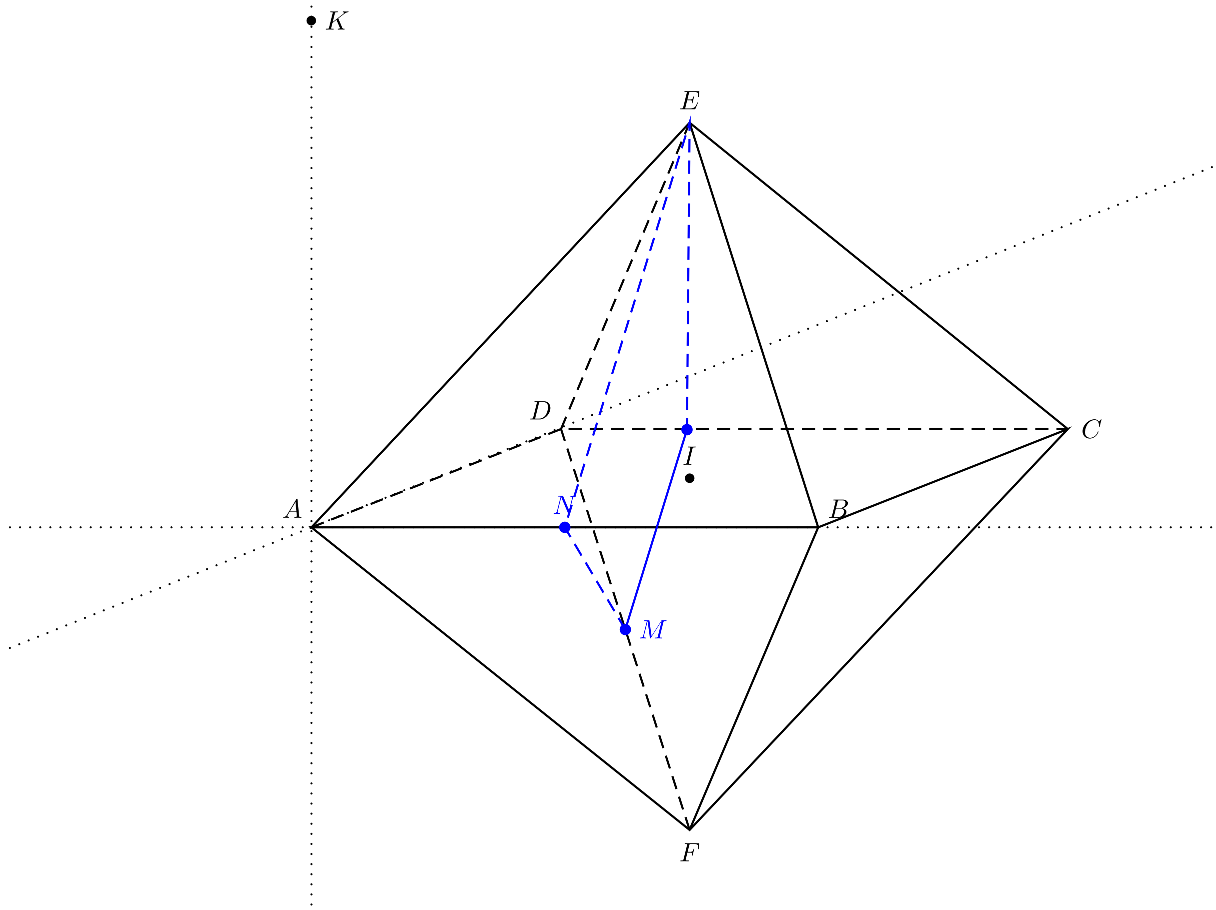


Les points D, F et C ont pour coordonnées respectives $(0,1,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $(1,1,0)$. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(1,0,0)$ et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{DC} = 0\times 1 - 2\times 0 + \sqrt{2}\times 0 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{DF} = 0\times\frac{1}{2} - 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (FDC). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (FDC).
Puisque le vecteur $\overrightarrow{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (ABE), on a montré que les plans (FDC) est (ABE) sont parallèles.

b) Puisque le point N n'est pas dans le plan (FDC) et que le point M est dans le plan (FDC), les plans (EMN) et (FDC) sont sécants en une droite (Δ) passant par M.
Puisque les plans (ABE) et (FDC) sont parallèles, le plan (EMN) coupe les plans (ABE) et (FDC) suivant deux droites parallèles. La droite (Δ) est donc la parallèle à la droite (EN) passant par M.



c) Construction. On note P le point d'intersection de la droite (Δ) de la question précédente et de la droite (DC). Pour obtenir la section du plan (ABF) par le plan (EMN), on a tracé la parallèle à la droite (PE) passant par N.