France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Soit x un réel.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln\left(x^2+1\right) = x \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'équation $f(x) = x$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution et une seule à savoir 0.

2) Dérivée et variations. Pour tout réel x, $x^2+1 > 0$ et donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour x réel,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (et s'annule en 1). Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln\left(x^2+1\right) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et en additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

3) Soit x un réel de $[0,1]$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0,1]$, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ avec $f(0) = 0$ (d'après la question 1)) et $f(1) = 1 - \ln 2 = 0,3\ldots$. En particulier, si $x \in [0,1]$, alors $f(x) \in [0,1]$.

4) a) A étant un réel donné, l'algorithme affiche la plus petite valeur de l'entier N pour laquelle on a $f(N) \geqslant A$.

b) D'après le tableau de variations de f, la suite $\left(N - \ln\left(N^2+1\right)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

La calculatrice fournit $f(109) = 99,6\ldots$ et $f(110) = 100,5\ldots$ L'algorithme affiche donc 110.

Partie B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0,1]$.

- $u_0 = 1$ et donc la propriété est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \in [0,1]$. Alors, $f(u_n) \in [0,1]$ d'après la question 3 de la partie A ou encore $u_{n+1} \in [0,1]$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \in [0,1].}$$

2) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$. Or, $u_n^2+1 > 1$ puis $\ln\left(u_n^2+1\right) > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ positif ou nul.

4) D'après la question 1) de la partie A, l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule à savoir 0. Donc,

$$\boxed{\ell = 0.}$$

