France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Justification 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2, -2, -2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2, -2, -2)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $-2 = 2k$ et aussi $-2 = -2k$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore que les points A, B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est fausse.

Justification 2. Les points A, B et C définissent donc un unique plan et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. La droite (EF) est la droite passant par $E(-1, -2, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}(-1, -1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (EF) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, le plan (ABC) est le plan passant par $A(1, 2, 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(0, 1, -1)$. Une équation du plan (ABC) est $0 \times (x - 1) + 1 \times (y - 2) - 1 \times (z - 3) = 0$ ou encore $y - z + 1 = 0$.

Soit $M(-1 - t, -2 - t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EF).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (-2 - t) - (3 + t) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Pour $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. Ainsi, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. D'autre part, le milieu du segment $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$ ou encore $(1, 0, 1)$. La droite (EF) et le plan (ABC) sont effectivement sécants en le milieu du segment $[BC]$.

L'affirmation 3 est vraie.

Justification 4.

1ère solution. Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, elles sont en particulier coplanaires et on en déduit que le point B appartient au plan (ABC). Mais $y_D - z_D + 1 = 1 - (-1) + 1 = 3 \neq 0$. Donc, le point D n'appartient pas au plan (ABC) et finalement les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2ème solution. La droite (AB) est la droite passant par $A(1, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1, -1, -1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

La droite (CD) est la droite passant par $C(-1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}(3, 1, -2)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 3u \\ y = u \\ z = 1 - 2u \end{array}\right., \ u \in \mathbb{R}.$$

Soient $M(1 + t, 2 - t, 3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB) et $N(-1 + 3u, u, 1 - 2u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CD).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+t=-1+3u \\ 2-t=u \\ 3-t=1-2u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ 1+t=-1+3(2-t) \\ 3-t=1-2(2-t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ 4t=4 \\ -3t=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est fausse.}}$

