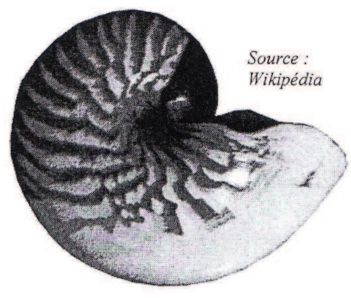
Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

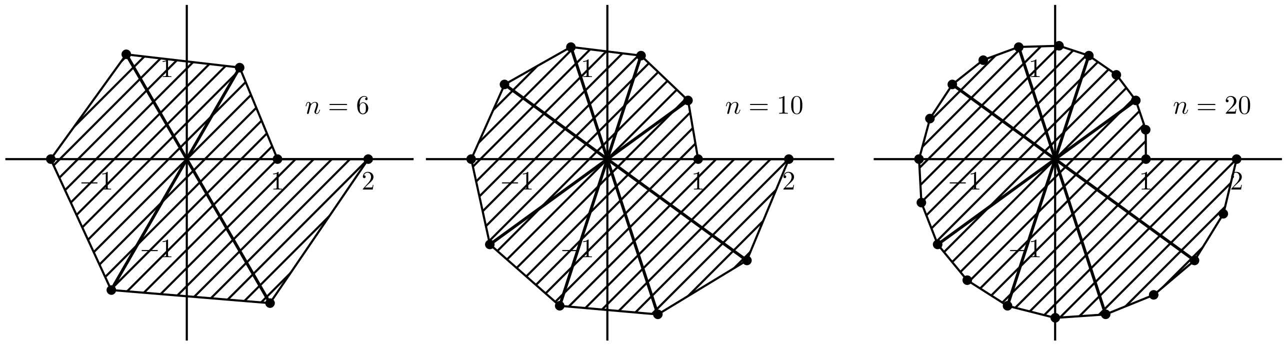
EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.



On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes
$z_k = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A - Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

1) Déterminer la forme algébrique de z_1.

2) Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.

3) Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B - Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.

2) Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

3) Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

4) On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.
L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES : A est un nombre réel
k est un entier
n est un entier
TRAITEMENT : Lire la valeur de n
A prend la valeur 0
Pour k allant de 0 à n-1
A prend la valeur $A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
Fin Pour
SORTIE : Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$
Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	10705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5) On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$.
Recopier et compléter les lignes $L6$ et $L13$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7,2$. On ne demande pas de déterminer n.

$L1$ VARIABLES : A est un nombre réel
$L2$ k est un entier
$L3$ n est un entier
$L4$ TRAITEMENT : n prend la valeur 2
$L5$ A prend la valeur 0
L6 **Tant que**. . . . .
$L7$ n prend la valeur $n+1$
$L8$ A prend la valeur 0
$L9$ Pour k allant de 0 à $n-1$
$L10$ A prend la valeur $A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
Fin Pour
$L12$ Fin Tant que
L13 **SORTIE :** **Afficher** . . .

