Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé
Partie A

1) $z_1 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)e^{\frac{2i\pi}{6}} = \dfrac{7}{6}e^{\frac{i\pi}{3}} = \dfrac{7}{6}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{7}{12}+i\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

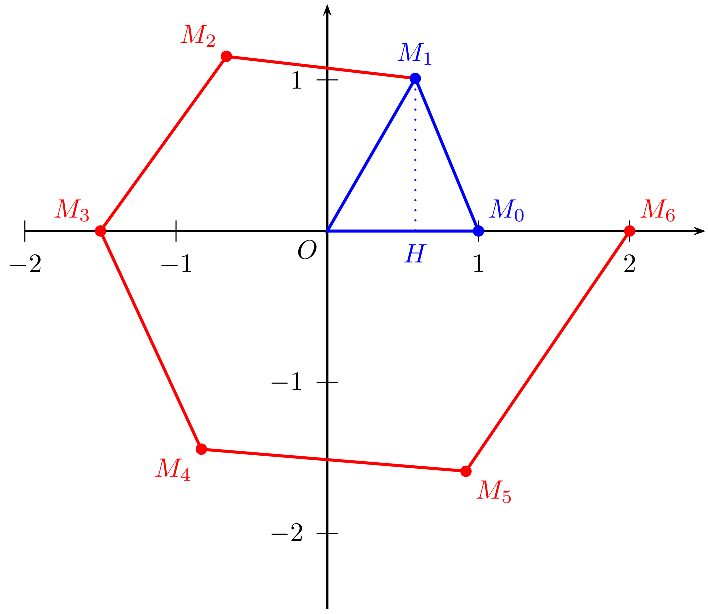
2) $z_0 = \left(1+\dfrac{0}{6}\right)e^{0} = 1$ et $z_6 = \left(1+\dfrac{6}{6}\right)e^{2i\pi} = 2\left(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)\right) = 2$. En particulier, z_0 et z_6 sont des entiers.

3) Notons H le pied de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1. On a $z_H = x_{M_1} = \mathrm{Re}\,(z_1) = \dfrac{7}{12}$ et donc

$$HM_1 = |z_1 - z_H| = \left|\frac{7}{12}+i\frac{7\sqrt{3}}{12}-\frac{7}{12}\right| = \left|i\frac{7\sqrt{3}}{12}\right| = \frac{7\sqrt{3}}{12}|i| = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors

$$\frac{OM_0\times HM_1}{2} = \frac{1\times\dfrac{7\sqrt{3}}{12}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}.$$



Partie B

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Puisque $1+\dfrac{k}{n} > 0$,

$$OM_k = |z_k| = \left|\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = \left(1+\frac{k}{n}\right)\left|e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = 1+\frac{k}{n}.$$

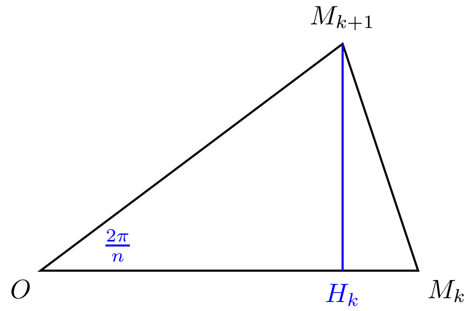
2) Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

$$\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_k}\right) = \arg\left(z_k\right) = \arg\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \frac{2k\pi}{n}\quad [2\pi].$$

et donc aussi $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\quad [2\pi]$. Par suite, d'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right) &= \left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_k}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\\ &= -\frac{2k\pi}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2(k+1-k)\pi}{n}\\ &= \frac{2\pi}{n}\quad [2\pi].\end{aligned}$$

3) Soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Notons H_k le pied de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.



D'après la question précédente, on a $\widehat{M_kOM_{k+1}} = \dfrac{2\pi}{n}$ puis

$$\frac{H_kM_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin\left(\widehat{M_kOM_{k+1}}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

et donc, d'après la question 1),

$$H_kM_{k+1} = OM_{k+1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left(1+\frac{k+1}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

4) Tableau complété.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	$0,323$	$0,711$	$1,170$	$1,705$	$2,322$	$3,027$	$3,826$	$4,726$	$5,731$	$6,847$

5) Algorithme complété.

Variables :	A est un nombre réel k est un entier n est un entier

Traitement :	n prend la valeur 2
	A prend la valeur 0
	Tant que $A < 7,2$
	    n prend la valeur $n+1$
	    A prend la valeur 0
	    Pour k allant de 0 à $n-1$
	        A prend la valeur $A + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
	    Fin Pour
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher n

