Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A. Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1) a) • 700 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.
• Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne accepte de répondre au sondage » avec une probabilité $p = 0,6$ et « la personne n'accepte pas de répondre au sondage » avec une probabilité $1 - p = 0,4$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

b) La calculatrice fournit $P(X \geqslant 400) = 0,942\ldots$ La meilleure valeur approchée de $P(X \geqslant 400)$ est $0,94$.

2) Notons n le nombre de personnes interrogées, n étant un entier supérieur ou égal à 400. Notons X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et $p = 0,6$. La probabilité que le nombre de personnes acceptant de répondre au sondage soit supérieur ou égal à 400 est $P(X_n \geqslant 400)$. La suite $(P(X_n \geqslant 400))_{n \geqslant 400}$ est bien sûr croissante.

La calculatrice fournit le tableau de valeurs suivant

n	$P(X_n \geqslant 400)$
700	$0,94\ldots$
699	$0,93\ldots$
698	$0,93\ldots$
697	$0,92\ldots$
696	$0,91\ldots$
695	$0,91\ldots$
694	$0,90\ldots$
693	$0,89\ldots$

La valeur minimum de l'entier n cherchée est 694.

Partie B

1) La fréquence observée est $f = 0,29$. On note $n \geqslant 50$ et en particulier $n \geqslant 30$ puis $nf \geqslant 0,29 \times 50$ ou encore $nf \geqslant 14,5$ et en particulier $nf \geqslant 5$ puis $n(1-f) \geqslant 0,71 \times 50$ et en particulier $n(1-f) \geqslant 5$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

2) L'amplitude de cet intervalle est $\left(0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

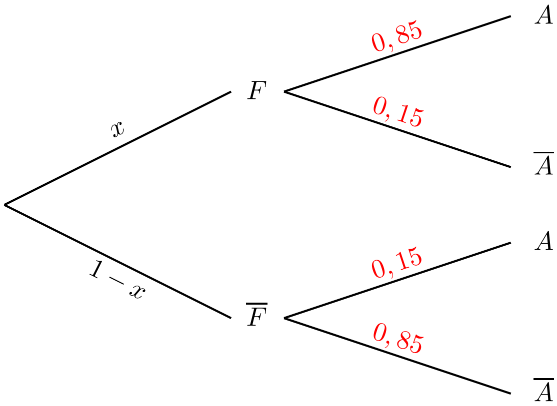
$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \frac{1}{0,04} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 50 \Leftrightarrow n \geqslant 2500.$$

La valeur minimale cherchée est 2500.

Partie C

1) $P_F(A)$ est la probabilité que la personne affirme qu'elle est favaorable au projet sachant qu'elle est favorable au projet.
D'après l'énoncé, parmi les personnes favorables, il y en a 15% de non sincères qui vont donc affirmer qu'elles ne sont pas favorables au projet et 85% de sincères qui vont donc affirmer qu'elles sont favorables au projet. Donc, $P_F(A) = 0,85$ et de même, $P_{\overline{F}}(A) = 0,15$.

2) a) Arbre complété.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F) \times P_F(A) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(A) = P(A)$$

et donc

$$0,85x + 0,15(1-x) = 0,29.$$

3) $0,85x + 0,15(1-x) = 0,29 \Leftrightarrow 0,7x = 0,14 \Leftrightarrow x = \dfrac{0,14}{0,7} \Leftrightarrow x = 0,2.$
Donc, 20% des personnes ayant accepté de répondre au sondage sont réellement favorables au projet.

